



TUGAS AKHIR - SM0141501

PENERAPAN METODE PERTURBATION PADA PERHITUNGAN NILAI OPSI ASIA

ANA WULANDARI
NRP 06111440000075

Dosen Pembimbing:
Endah R.M. Putri, Ph.D.
Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes.

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2018



FINAL PROJECT - SM141501

**APPLICATION OF PERTUBATION METHOD TO
VALUATION OF ASIAN OPTIONS**

ANA WULANDARI
NRP 06111440000075

Supervisors:
Endah R.M. Putri, Ph.D.
Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics, Computations, and Data Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2018

LEMBAR PENGESAHAN

PENERAPAN METODE PERTURBATION PADA PADA PERHITUNGAN NILAI OPSI ASIA

APPLICATION OF PERTURBATION METHOD TO VALUATION OF ASIAN OPTIONS


TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

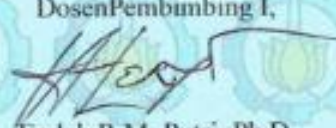
Oleh :
ANA WULANDARI
NRP. 06111440000075

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,



Dra. Nuri Wahyuningasih, M.Kes.
NIP. 19650226 198903 2 002

Dosen Pembimbing I,


Endah R.M. Putri, Ph.D.
NIP. 19761213 200212 2 001

Mengetahui,

Ketua Departemen Matematika
FMKSD ITS


Dr. Imami Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, 27 Juni 2018

PENERAPAN METODE *PERTURBATION* PADA PERHITUNGAN NILAI OPSI ASIA

Nama Mahasiswa : ANA WULANDARI
NRP : 06111440000075
Departemen : Matematika FMKSD-ITS
Pembimbing : 1. Endah R.M. Putri, Ph.D.
2. Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes.

Abstrak

Metode perturbation merupakan salah satu cara untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang tidak dapat diselesaikan dengan cara biasa, seperti persamaan diferensial Black-Scholes. Pendekatan solusi model Black-Scholes menggunakan metode perturbation menghasilkan nilai error yang kecil terhadap solusi eksaknya. Fokus utama dalam Tugas Akhir ini adalah penerapan metode perturbation pada perhitungan nilai opsi Asia tipe Eropa. Opsi Asia tipe Eropa adalah opsi dimana payoff bergantung pada rata-rata harga aset selama opsi tersebut berlaku dan hanya dapat dieksekusi pada saat jatuh tempo saja. Persamaan diferensial dalam Tugas Akhir ini menggunakan persamaan diferensial dari opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa. Penerapan metode Perturbation pada persamaan diferensial opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa melalui transformasi menjadi persamaan difusi yang selanjutnya diberikan parameter Perturbation sehingga didapatkan solusi. Hasil simulasi dengan menggunakan software MATLAB menunjukkan bahwa pengaruh parameter strike price (K), maturity date (T), risk free interest rate (r), dan volatilitas (σ) pada model opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa dengan metode Perturbation sesuai dengan trend nilai opsi Asia.

Kata-kunci: *Metode perturbation, opsi Asia, opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa.*

APPLICATION OF PERTUBATION METHOD TO VALUATION OF ASIAN OPTIONS

Name : ANA WULANDARI
NRP : 06111440000075
Department : Mathematics FMKSD-ITS
Supervisors : 1. Endah R.M. Putri, Ph.D.
2. Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes.

Abstract

Perturbation method is a method that can be used to solve differential equations that can not be solved in the usual way, such as the Black-Scholes differential equation. The solution approach of Black-Scholes model is using perturbation method yields a small error value against its exact solution. The main focus in this Final Project applied perturbation method in the calculation of value of Asian option of European type. The Asian option of the European type is an option where payoff depends on the average of asset price as long as the option is valid and can only be executed at maturity date only. The differential equation to be used in this Final Project is the differential equation of the European-Style Geometric Average Asian Option. The application of perturbation method to the differential equation of the European-Style Geometric Average Asian Option through transformation into a diffusion equation which is then given parameters of perturbation to obtain a solution. The results of simulation using MATLAB software shows that influence of strike price (K), maturity date T , risk free interest rate (r), and volatility (σ) in the European-Style Geometric Average Asian Option is same with trend value of Asian Option.

Keywords: *Perturbation Method, Asian Option, European Style Geometric Average Asian Option.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

"PENERAPAN METODE *PERTURBATION* PADA PERHITUNGAN NILAI OPSI ASIA"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMKSD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Kepala Departemen Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
2. Ibu Endah R.M. Putri, Ph.D. dan Ibu Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
3. Bapak Drs. Suharmadi Sanjaya, Dipl. Sc., M.Phil., Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si. dan Drs. Lukman Hanafi, M.Sc. selaku dosen penguji atas semua saran dan masukan yang telah diberikan.
4. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku koordinator Tugas Akhir.

5. Ibu Dr. Dra. Mardlijah, M.T selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika FMKSD ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
7. Kedua orang tua saya, Samsul Arifin dan Supaidah, saudara saya Ayunda Putri Permatasari dan Muhammad Deni Ervandi selaku editor abstrak, serta keluarga besar tercinta di Probolinggo yang selalu mendoakan dan memberikan motivasi kepada saya.
8. Mas Muhammad Prio Ambodo yang tidak pernah bosan memberikan motivasi dalam mengerjakan Tugas Akhir ini.
9. Keluarga AKSIOM14 selaku teman seperjuangan yang selalu memberikan semangat khususnya Faizin Anshori selaku editor penulisan, Giska Ayu Aulia selaku editor penerjemah sekaligus percetakan, Muhammad Afif Nasrul Anam selaku editor simulasi, Meylita Sari selaku penyedia *falshdisk*, serta Siti Umroka dan Halimatus Sa'diyah selaku teman begadang. Tak lupa pula keluarga S2 Matematika, khususnya Mas Heri Purnawan dan Mbak Annisa Rahmita S selaku editor simulasi, serta keluarga besar Muhyiddin, UK Rebana, PMII ITS, dan IMPROSES.

Penulis juga menyadari bahwa dalam pengerjaan ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini dan semoga penulisan ini dapat bermanfaat.

Surabaya, Mei 2018

Penulis

DAFTAR ISI

	Hal
HALAMAN JUDUL	i
ABSTRAK	v
ABSTRACT	vii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
BAB I Pendahuluan	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	4
1.5 Manfaat	4
1.6 Sistematika Penulisan	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Penelitian Terdahulu	7
2.2 Teori <i>Perturbation</i>	8
2.3 Opsi Saham	11
2.4 Opsi Asia	12
2.5 Istilah-istilah Dasar Opsi.....	13
2.6 Keuntungan dari Perdagangan Opsi	15
2.7 Faktor-faktor yang Mempengaruhi Nilai Opsi	15

2.8	Dasar-dasar Penentuan Nilai Opsi	17
2.9	<i>Hedging</i>	17
2.10	Portofolio	18
2.11	<i>Free of Arbitrage</i>	19
2.12	Brownian <i>Motion</i>	19
2.13	Proses Stokastik	20
2.14	Lemma Itô	21
2.15	Rata-Rata Geometrik Opsi Asia	21
2.16	Persamaan Diferensial Parsial Black-Scholes .	26
2.17	Persamaan Model Opsi Asia Rata-Rata Geometrik Tipe Eropa	27
2.18	Persamaan Difusi	29
BAB III	METODOLOGI PENELITIAN	31
BAB IV	ANALISIS DAN PEMBAHASAN	37
4.1	Pergerakan Nilai Saham dan Rata-Rata Geometrik Berdistribusi Lognormal	37
4.1.1	Pergerakan Nilai Saham	37
4.1.2	Rata-Rata Geometrik dalam Opsi Asia	41
4.2	Penurunan Persamaan Diferensial	48
4.2.1	Pembentukan Persamaan Opsi Asia ...	49
4.2.2	Pembentukan Persamaan Opsi Asia Rata-Rata Geometrik	51
4.2.3	Pembentukan Persamaan Opsi Asia Rata-Rata Geometrik Tipe Eropa	54
4.3	Solusi Analitik	58
4.4	Solusi Analitik Aproksimasi	72
4.5	Simulasi dan Analisis Hasil Simulasi	78
4.5.1	Perbandingan Simulasi Analitik dan Analitik Aproksimasi	78
4.5.2	Simulasi Solusi Analitik Aproksimasi ..	80

BAB V	PENUTUP	87
5.1	Kesimpulan	87
5.2	Saran	88
DAFTAR PUSTAKA		89
LAMPIRAN		92
BIODATA PENULIS		105

DAFTAR GAMBAR

	Hal
Gambar 2.1 Ilustrasi Persamaan Difusi	29
Gambar 3.1 Diagram Alir Pengerjaan Tugas Akhir .	33
Gambar 3.2 Diagram Alir Simulasi	34
Gambar 3.3 Diagram Alir Formula Nilai Opsi Analitik	35
Gambar 3.4 Diagram Alir Formula Nilai Opsi numerik	35
Gambar 4.1 Selisih Simulasi Analitik Aproksimasi dan Analitik	79
Gambar 4.2 Simulasi Pengaruh Nilai <i>Strike Price</i> ..	81
Gambar 4.3 Simulasi Pengaruh Nilai <i>T</i>	82
Gambar 4.4 Simulasi Pengaruh Nilai <i>Risk Free</i> <i>Interest Rate</i>	83
Gambar 4.5 Simulasi Pengaruh Nilai Volatilitas	84

DAFTAR TABEL

	Hal
Tabel 4.1 Perbandingan Analitik Aproksimasi dan Analitik	80

DAFTAR LAMPIRAN

	Hal
LAMPIRAN A Source Code Perbandingan Simulasi Analitik Aproksimasi dan Analitik . . .	59
LAMPIRAN B Source Code Pengaruh Nilai <i>Strike</i> <i>Price</i>	85
LAMPIRAN C Source Code Pengaruh Nilai <i>Maturity</i> <i>Date</i>	89
LAMPIRAN D Source Code Pengaruh Nilai <i>Risk Free</i> <i>Interest Rate</i>	93
LAMPIRAN E Source Code Pengaruh Nilai Volatilitasi	95

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dibahas latar belakang yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Kemudian membahas permasalahan pada topik Tugas Akhir dan dirumuskan menjadi permasalahan yang diberikan batasan untuk membatasi pembahasan pada Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang Masalah

Masalah *Perturbation* merupakan bagian penting yang muncul pada berbagai cabang ilmu teknik dan matematika terapan. Metode *Perturbation* digunakan untuk menentukan solusi aproksimasi, biasanya ditulis dalam bentuk ekspansi barisan dari suatu sistem yang mengalami gangguan (*perturbed system*) dan dicirikan dengan adanya suatu parameter yang bernilai kecil atau disebut parameter *Perturbation*. Sistem tersebut dapat berupa persamaan aljabar, persamaan diferensial, persamaan beda, dan lain-lain. Parameter *perturbation* muncul ketika suatu proses fisis terjadi jauh lebih lambat daripada proses fisis yang lain atau ketika suatu skala panjang jauh lebih pendek daripada skala panjang yang lain. Solusi yang diperoleh dari metode *Perturbation* disebut solusi ekspansi asimtotik dan atau disingkat solusi asimtotik. Bentuk standar ekspansi *perturbation* adalah berupa deret pangkat dari parameter *Perturbation* [1].

Metode *Perturbation* merupakan salah satu metode matematika yang digunakan dalam penentuan nilai opsi. Pada tahun 2017 metode *perturbation* telah digunakan oleh

Ruben Sousa, Ana Bela Cruizero, dan Manuel Guera untuk menentukan nilai opsi [2]. Dalam papernya, mereka menggunakan metode *perturbation* reguler dari analisis asimtotik persamaan diferensial parsial, diperoleh rumus eksplisit untuk penentuan nilai opsi berdasarkan model volatilitas stokastik hieopergeometrik kedua. Paper lainnya yang ditulis oleh Miao Xu dan Charles Knessl pada tahun 2011 menggunakan metode *perturbation* untuk menentukan batas bebas persamaan diferensial parsial pada opsi *put* Amerika [3]. Tujuan utama penggunaan metode *perturbation* dalam Tugas Akhir ini adalah penerapan metode *Perturbation* untuk perhitungan nilai opsi Asia tipe Eropa.

Opsi adalah bentuk perdagangan derivatif yang telah tumbuh dengan pesat dalam pasar keuangan dunia. Salah satu contoh pasar keuangan dunia yang terkenal adalah pasar modal. Dalam dunia pasar modal, pemilik aset akan melakukan investasi untuk meminimalkan kerugian dalam penjualan atau pembelian sejumlah aset. Saham merupakan produk investasi yang menarik. Selain berinvestasi dengan memiliki secara langsung saham yang diperdagangkan di pasar, investor juga dapat berinvestasi dengan cara membeli turunan dari nilai saham yang disebut dengan pasar derivatif (*financial derivative*). Opsi merupakan salah satu produk pasar derivatif yang banyak diperjual belikan.

Opsi didefinisikan sebagai kontrak antara penjual (*writer*) dan pembeli atau penerbit (*holder*), dimana pihak penjual memberi hak kepada pembeli (bukan kewajiban) untuk membeli atau menjual suatu aset dikemudian hari dengan nilai yang disepakati saat ini [4]. Berdasarkan jenisnya, opsi dibagi menjadi 2 jenis, yaitu opsi *call* dan opsi *put*. Opsi *call* adalah hak untuk membeli sejumlah tertentu suatu *underlying asset* dengan nilai sebesar *strike price*, pada waktu jatuh tempo (*maturity date*). Sedangkan opsi *put*

adalah hak untuk menjual sejumlah tertentu suatu *underlying asset* dengan nilai sebesar *strike price* pada waktu jatuh tempo (*maturity date*). Selain berdasarkan jenisnya, terdapat pula opsi dimana *payoff* tidak hanya bergantung pada nilai aset pada saat pelaksanaannya, tetapi juga bergantung pada nilai-nilai aset selama masa berlaku opsi. Opsi ini disebut dengan *path dependent option* atau dikenal juga dengan opsi eksotik (*exotic option*). Salah satu contoh dari opsi eksotik adalah opsi Asia. Opsi Asia adalah opsi dimana *payoff* bergantung pada rata-rata nilai aset selama opsi tersebut berlaku.

Perhitungan nilai opsi Asia dalam Tugas Akhir ini menggunakan persamaan diferensial opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa. Selanjutnya persamaan diferensial tersebut akan diselesaikan dengan menggunakan metode *Perturbation*. Solusi yang diperoleh akan dibandingkan dengan solusi analitik untuk mengetahui keakuratannya dan disimulasikan menggunakan *software* MATLAB.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, rumusan masalah dalam Tugas Akhir ini adalah bagaimana penerapan Metode *Perturbation* pada perhitungan nilai opsi Asia.

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas, batasan masalah dari Tugas Akhir ini adalah:

1. Opsi yang dijadikan acuan adalah opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa.
2. Volatilitas nilai saham konstan.
3. Saham tidak membagikan dividen.
4. Pajak dan biaya transaksi diabaikan.

5. Menggunakan opsi *call* Asia rata-rata geometrik tipe Eropa dengan *payoff* dari *average price option* opsi Asia.

1.4 Tujuan

Tujuan dari Tugas Akhir ini adalah mengetahui penerapan Metode *Perturbation* pada perhitungan nilai opsi Asia.

1.5 Manfaat

Manfaat Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Sebagai suatu bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu matematika terapan.
2. Memberikan informasi mengenai penerapan metode *Perturbation* pada perhitungan nilai opsi Asia.
3. Sebagai literatur penunjang bagi mahasiswa yang menempuh jenjang sarjana.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, Batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini membahas landasan teori yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Didalamnya mencakup penelitian terdahulu, metode *Perturbation*, opsi saham, opsi Asia, dan persamaan opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa serta materi-materi pendukung seperti proses stokastik, lemma Itô, *hedging*, portofolio, Brownian *motion*, dan persamaan diferensial parsial Black-Scholes.

3. BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah pada Tugas Akhir. Disamping itu, dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan secara detail mengenai pembentukan persamaan opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa dan solusi analitiknya. Kemudian dijelaskan mengenai penerapan metode *Perturbation* dan solusinya. Diakhir pembahasan akan dilakukan analisis terhadap hasil simulasi analitik aproksimasi menggunakan *software* MATLAB.

5. BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini membahas landasan teori yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Didalamnya mencakup penelitian terdahulu, metode *perturbation*, opsi saham, opsi Asia, dan persamaan opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa.

2.1 Penelitian Terdahulu

Penulisan dalam Tugas Akhir ini merujuk pada beberapa penelitian-penelitian sebelumnya yang sesuai dengan topik yang diambil. Rujukan pertama yang digunakan adalah penelitian yang dilakukan oleh Jin E. Zhang tahun 2002 yang berjudul "*Pricing Continuously Sampled Asian Options With Perturbation Method*" [5]. Pada penelitian tersebut Zhang menggunakan metode *perturbation* untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Solusi yang didapatkan oleh Zhang lebih akurat daripada solusi yang didapat dalam literaturnya.

Penulis juga mengambil rujukan yang dilakukan oleh Chi Seng Pun dan Hoi Ying Wong pada tahun 2013 dengan judul "*CEV asymptotics of American options*" [6]. Dalam penelitiannya, opsi Amerika ditransformasi menjadi distribusi hipergeometrik dengan cara invers Laplace dan selanjutnya diselesaikan menggunakan metode *Perturbation*.

Rujukan lainnya yang dijadikan literatur oleh penulis terdapat dalam paper "*Pricing perpetual American options under a stochastic volatility model with fast mean reversion*" yang dilakukan oleh Song Ping Zhu dan Wenting Chen tahun 2011. Mereka membahas topik tentang metode *perturbation*

yang digunakan untuk menghitung opsi *put* Amerika [7]. Hasil dari penelitian mereka didapatkan dua formula analitik dari model *stochastic volatility* yang diselesaikan dengan metode *perturbation*.

2.2 Teori *Perturbation*

Masalah *perturbation* merupakan bagian penting yang muncul pada berbagai cabang ilmu teknik dan matematika terapan. Metode *perturbation* dalam matematika dapat digunakan untuk mendapatkan pendekatan solusi pada persamaan diferensial yang kompleks dan solusi eksaknya susah dicari. Kata *perturbation* memiliki arti gangguan kecil pada sistem fisik. Secara umum gangguan kecil pada sistem fisik dinotasikan dengan p , dimana p merupakan parameter *perturbation* yang bernilai kecil. Metode *perturbation* dapat dibagi menjadi dua bagian antara lain sebagai berikut.

1. *Regularly perturbed*

Suatu persamaan diferensial dikatakan sebagai *regularly perturbed* jika nilai $p = 0$ maka orde dari persamaan diferensial tersebut tidak berubah. Contoh persamaan diferensial yang termasuk dalam permasalahan *regularly perturbed* adalah

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = py^2.$$

2. *Singularly perturbed*

Persamaan diferensial dikatakan sebagai *singularly perturbed* jika nilai $p = 0$ maka orde dari persamaan diferensial tersebut berubah. Contoh persamaan diferensial yang termasuk dalam permasalahan *singularly perturbed* adalah

$$p \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2x + 1.$$

Salah cara untuk mendapatkan pendekatan solusi pada *singular perturbed*, yaitu dengan mendapatkan persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial v_0}{\partial \tau} = p \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \left(r - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\partial v}{\partial \xi} - rv - \frac{\partial v_0}{\partial \tau} \right). \quad (2.1)$$

Deret pangkat dari parameter *Perturbation* dapat dinyatakan

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (2.2)$$

diketahui nilai *payoff* persamaan diatas adalah

$$v(\xi, 0) = \max(e^\xi - E, 0)$$

dan

$$v_i(\xi, 0) = 0$$

untuk $i = 1, 2, 3, \dots$ maka $p \rightarrow 1$. Subtitusikan Persamaan (2.1) ke (2.2), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial v_0}{\partial \tau} - \frac{\partial v_0}{\partial \tau} \right) + p \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + p^2 \frac{\partial v_2}{\partial \tau} + \dots = \\ & p \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} + \left(r - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\partial v_0}{\partial \xi} - rv_0 - \frac{\partial v_0}{\partial \tau} \right) - \\ & p^2 \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \left(r - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - rv_1 \right) - \dots \end{aligned}$$

Dengan mengelompokkan suku yang mempunyai orde sama, diperoleh

$$p^0 : \frac{\partial v_0}{\partial \tau} - \frac{\partial v_0}{\partial \tau} = 0$$

$$\begin{aligned}
p^1 & : \quad \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial v_0}{\partial \xi} - rv_0 - \frac{\partial v_0}{\partial \tau} \\
p^2 & : \quad \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - rv_0 \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& \cdot \\
p^n & : \quad \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial \xi^2} + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial v_{n-1}}{\partial \xi} - rv_{n-1}
\end{aligned}$$

Telah diketahui bahwa nilai *payoff* adalah

$$v_0(\xi, \tau) = \max(e^\xi - E, 0)$$

maka

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_0}{\partial \xi} & = \max(e^\xi, 0) \\
\frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} & = \max(e^\xi, 0).
\end{aligned}$$

Solusi untuk $v_1(\xi, t)$ adalah

$$v_1(\xi, t) = \frac{1}{2}\sigma^2\tau \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \frac{\partial v_0}{\partial \xi} - rv_0\tau - v_0 + c_1.$$

Disebabkan oleh $v_1(\xi, 0) = 0$ dan $p \rightarrow 1$, maka $c_1 = v_0$, diperoleh penyelesaian

$$\begin{aligned}
v_1(\xi, t) & = \frac{1}{2}\sigma^2\tau \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \frac{\partial v_0}{\partial \xi} - rv_0\tau \\
& = r\tau(\max(e^\xi, 0) - \max(e^\xi - E, 0)) - q\tau(\max(e^\xi, 0))
\end{aligned}$$

dengan cara yang sama untuk v_2, v_3, \dots, v_{n-1} sehingga diperoleh

$$v_n(\xi, t) = \max(e^\xi, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-n)^n [(q\tau)^n \max(e^\xi, 0) - r\tau^n (\max(e^\xi, 0) - \max(e^\xi - E, 0))]. \quad (2.3)$$

2.3 Opsi Saham

Opsi saham merupakan salah satu alat yang dapat digunakan untuk mengamankan investasi saham yang dimiliki investor. Nilai nyata opsi saham dapat diketahui saat tanggal jatuh tempo. Opsi merupakan sebuah instrumen keuangan yang diantaranya memungkinkan seseorang untuk melakukan spekulasi berkaitan dengan naik atau turunnya nilai dari suatu aset yang mendasari *underlying asset*, misalnya saham perusahaan, mata uang, komoditas pertanian, dan sebagainya. Menurut Rudiger pada tahun 2002 menyatakan bahwa opsi merupakan suatu perjanjian antara dua pihak, yaitu *writer* sebagai penyusun kontrak opsi yang seringkali adalah sebuah bank dan *holder* sebagai pembeli opsi dengan nilai pasar yang telah disepakati (premi) [9].

Berdasarkan waktu pelaksanaannya, opsi dapat dibedakan menjadi opsi Eropa (*European options*) dan opsi Amerika (*American options*). Opsi yang hanya dapat dilakukan pada tanggal jatuh tempo disebut opsi Eropa. Opsi yang dapat dilakukan kapan saja hingga tanggal jatuh tempo disebut opsi Amerika. Kedua opsi ini disebut opsi vanilla atau *vanilla option*. Selain itu, terdapat opsi dimana *payoff* tidak hanya bergantung pada nilai aset pada saat pelaksanaannya, tetapi juga bergantung pada nilai-nilai aset selama masa berlaku opsi. Opsi ini disebut dengan *path dependent option* atau dikenal juga dengan opsi eksotik atau *exotic option*. Salah satu contoh dari opsi eksotik adalah opsi Asia.

Menurut Bodie, ada dua jenis dasar opsi, yaitu *call* dan *put* [10]. Opsi *call* adalah hak untuk membeli sejumlah tertentu suatu *underlying asset* dengan nilai sebesar *strike price*, pada waktu jatuh tempo *maturity date*. Sedangkan opsi *put* adalah hak untuk menjual sejumlah tertentu suatu *underlying asset* dengan nilai sebesar *strike price* pada waktu jatuh tempo *maturity date*.

Menurut Seydel, jika S_T adalah nilai saham di pasar pada waktu T dan K adalah *strike price* maka keuntungan atau nilai *payoff* untuk kedua jenis opsi diatas diberikan sebagai berikut [11] :

1. untuk opsi *call*

$$C(S_T - T) = \begin{cases} S_T - K, & S_T > K \\ 0, & S_T \leq K \end{cases}$$

2. untuk opsi *put*

$$P(S_T - T) = \begin{cases} K - S_T, & K > S_T \\ 0, & K \leq S_T \end{cases}$$

3. nilai *payoff* untuk opsi *call*, yaitu $\max(S_T - K)$ atau $(S_T - K, 0)^+$, sedangkan nilai *payoff* untuk opsi *put*, yaitu $\max(K - S_T)$ atau $(K - S_T, 0)^+$.

2.4 Opsi Asia

Opsi Asia tipe Eropa adalah opsi yang *payoff*nya bergantung pada perbedaan antara rata-rata nilai aset selama masa hidup opsi dan hanya dapat dieksekusi pada saat waktu jatuh tempo. Rata-rata kontinu opsi Asia dalam bentuk matematis dapat ditulis $\frac{1}{T} \int_0^T S(\tau) d\tau$. Opsi Asia dapat didefinisikan kembali dengan mengganti rata-rata kontinu dengan menggunakan rata-rata aritmatik, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i)$, atau

rata-rata geometrik, $(\prod_{i=1}^n S(t_i))^{\frac{1}{n}}$, dimana $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$.

Diketahui harga saham berdistribusi lognormal, namun rata-rata aritmatika tidak diketahui distribusinya. Sehingga mengakibatkan tidak adanya solusi eksak untuk menentukan nilai opsi Asia dengan rata-rata aritmatika. Sedangkan, rata-rata geometrik berdistribusi lognormal, ketika harga saham berdistribusi lognormal. Oleh karena itu, dalam Tugas Akhir ini menggunakan rata-rata geometrik, dimana *payoff* rata-rata geometrik dinyatakan dengan $\max\left((\prod_{i=1}^n S(t_i))^{\frac{1}{n}} - K, 0\right)$ untuk opsi *call* Asia dan $\max\left(K - (\prod_{i=1}^n S(t_i))^{\frac{1}{n}}, 0\right)$ untuk opsi *put* Asia.

2.5 Istilah-istilah Dasar Opsi

Beberapa istilah-istilah penting yang mendasari perdagangan opsi antara lain [13] :

1. *Underlying Asset*

Opsi yang diperdagangkan dalam pasar opsi hanya tersedia untuk sekuritas-sekuritas yang merupakan aset mendasar (*underlying asset*) yang diperdagangkan dalam pasar modal. Contoh *underlying asset*, yaitu komoditas (minyak, gas, emas), saham, mata uang, obligasi. Pada umumnya *underlying asset* disimbolkan dengan S .

2. *Maturity Date*

Maturity date adalah waktu jatuh tempo atau batas waktu dimana opsi tersebut dapat dilaksanakan atau dieksekusi. Setelah melewati *maturity date*, opsi dinyatakan kadaluarsa atau tidak dapat dieksekusi. Pada umumnya *underlying asset* disimbolkan dengan T .

3. *Payoff*

Payoff adalah keuntungan akibat menggunakan (*exercise*)

opsi. *Payoff* masih menunjukkan keuntungan kotor dari selisih harga saham di pasar dengan harga penggunaan opsi (*exercise price*).

4. *Strike Price* atau *Exercise Price*

Strike price adalah nilai pembelian atau penjualan yang telah ditentukan untuk *underlying asset* ketika opsi dieksekusi. nilai tersebut menjadi patokan pada saat jatuh tempo (*maturity date*). Pada umumnya *strike price* disimbolkan dengan T .

5. Dividen

Dividen merupakan bagian dari keuntungan perusahaan yang dibagikan kepada para pemegang saham. Dividen biasanya disimbolkan dengan q .

6. Volatilitas

Volatilitas merupakan suatu ukuran yang menunjukkan seberapa besar nilai berfluktuasi dalam suatu periode [14]. Volatilitas atas *underlying asset* adalah suatu ukuran tingkat ketidakpastian mengenai pergerakan *underlying asset* tersebut di masa yang akan datang. Jika volatilitas semakin meningkat maka akan semakin meningkat juga peluang *undelying asset* untuk mengalami peningkatan atau penurunan terhadap suatu opsi.

7. Aset beresiko dan aset bebas resiko

Aset berisiko adalah aset yang memiliki tingkat keuntungan yang tidak pasti di masa depan. Aset bebas risiko adalah aset yang memiliki tingkat keuntungan yang pasti di masa depan.

8. Premi

Premi merupakan nilai yang harus dibayarkan oleh pembeli opsi kepada penjual opsi.

2.6 Keuntungan dari Perdagangan Opsi

Ada beberapa keuntungan dari perdagangan opsi yang dapat diperoleh antara lain [15] :

1. Manajemen Risiko

Opsi *put* dari suatu *underlying asset* yang dimiliki oleh investor dapat digunakan untuk melakukan *hedging* (melindungi portofolio terhadap risiko penurunan nilai pasar) melalui penundaan penjualan saham yang dimilikinya terhadap penurunan nilai, sehingga dapat menghindari terjadinya risiko kerugian.

2. Memberikan Waktu yang Fleksibel untuk Memutuskan

Pemegang opsi *call* maupun opsi *put* dari sebuah kontrak opsi dapat menentukan apakah akan melaksanakan haknya atau tidak hingga masa jatuh tempo berakhir (*maturity date*).

3. Menyediakan Sarana Spekulasi

Para investor dapat memperkirakan nilai naik dengan pertimbangan membeli opsi *call* dan pertimbangan membeli opsi *put* jika perkiraan nilai turun. Hal ini dilakukan untuk memperoleh keuntungan.

2.7 Faktor-faktor yang Mempengaruhi Nilai Opsi

Dalam perdagangan opsi, beberapa faktor yang sangat mempengaruhi nilai sebuah opsi antara lain [16]:

1. Nilai *Strike Price*

Nilai suatu *strike price* dijadikan patokan dalam menentukan nilai opsi. Nilai suatu opsi *put* akan semakin meningkat apabila nilai *strike price*-nya juga meningkat. Begitupun untuk nilai opsi *call* akan mengalami peningkatan. Hal ini menunjukkan bahwa nilai *strike price* berbanding lurus dengan nilai opsi *put* dan *call*.

2. Jangka Waktu Jatuh Tempo

Nilai suatu opsi bergantung pada jangka waktu jatuh tempo opsi tersebut. Untuk opsi Amerika, kedua macam opsi yaitu opsi *call* Amerika dan opsi *put* Amerika menjadi lebih bernilai apabila jangka waktu jatuh temponya semakin meningkat. Dikarenakan opsi Amerika dapat dieksekusi sewaktu-waktu sampai batas *maturity date*. Sementara untuk nilai opsi Eropa, baik opsi *call* maupun opsi *put* tidak berpengaruh terhadap waktu jatuh tempo (*maturity date*). Hal ini dikarenakan opsi Eropa dieksekusi hanya pada saat *maturity date*.

3. Volatilitas

Volatilitas suatu *underlying asset* merupakan tolak ukur tingkat ketidakpastian pergerakan *underlying* tersebut dimasa mendatang. Volatilitas semakin meningkat akan mengakibatkan peluang *underlying asset* mengalami peningkatan atau bahkan mengalami penurunan. Semakin besar volatilitas (semakin besar jarak antara naik turunnya nilai *underlying asset*), maka semakin meningkat nilai opsi *call* dan opsi *put*.

4. Tingkat Suku Bunga Bebas Risiko

nilai suatu opsi juga dipengaruhi oleh tingkat suku bunga bebas risiko. Jika tingkat suku bunga dalam perekonomian meningkat, maka akan mempengaruhi harapan kenaikan nilai suatu *underlying asset*, misalnya saham. nilai opsi *call* akan meningkat dengan adanya peningkatan *risk free interest rate*. Begitu pula sebaliknya, nilai opsi *put* akan menurun.

Selain itu, harga opsi juga dipengaruhi oleh kondisi harga aset [13]. Kondisi tersebut meliputi,

1. *At the money*

Kondisi *at the money* pada opsi *call* apabila nilai $S > K$ dan pada opsi *put* apabila nilai $S < K$.

2. *In the money*

Kondisi *in the money* pada opsi *call* ataupun opsi *put* apabila nilai $S = K$.

3. *Out of money*

Kondisi *out of money* pada opsi *call* apabila nilai $S < K$ dan pada opsi *put* apabila nilai $S > K$.

2.8 Dasar-dasar Penentuan Nilai Opsi

Penentuan nilai sebenarnya dari suatu opsi merupakan hal penting. Apabila investor dapat menentukan nilai instrinsiknya, maka nilai pasar juga dapat ditentukan. Nilai instrinsik adalah perbedaan antara *strike price* dan nilai pasar dari *underlying asset* pada suatu waktu.

Nilai instrinsik opsi *call* akan positif apabila nilai saham lebih besar dari nilai kesepakatan (*strike price*) atau biasa disebut *in the money*. Selisih antara nilai saham sebenarnya dan *strike price* mempengaruhi besarnya nilai instrinsik. Apabila nilai saham kurang dari *strike price*, maka nilai instrinsik opsi *call* adalah nol (*out the money*). Sedangkan nilai saham yang besarnya sama dengan *strike price*, maka opsi *call* dikatakan *at the money*. opsi *call* pada saat *out the money* maupun *at the money* akan memiliki nilai instrinsik sebesar nol, karena opsi *call* tersebut tidak menguntungkan jika dilaksanakan [15].

2.9 Hedging

Hedging adalah strategi berinvestasi yang dilakukan seorang investor untuk melindungi nilai aset yang dimiliki. *hedging* tidak memberikan jaminan keuntungan, namun *hedging* meminimalkan terjadinya kerugian yang akan dialami investor. *Hedging* dengan menggunakan opsi saham banyak

dilakukan oleh investor untuk berinvestasi di pasar modal. Opsi saham yang digunakan untuk melindungi aset saham disebut opsi saham. *Delta hedging* merupakan salah satu strategi untuk melindungi nilai saham. *Delta hedging*, Δ , adalah turunan pertama nilai opsi saham terhadap nilai saham [12]. Secara matematis dinyatakan oleh

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad (2.4)$$

dengan :

Δ : *delta hedging*,
 V : nilai opsi saham,
 S : nilai saham.

2.10 Portofolio

Portofolio adalah gabungan dari aset-aset yang dimiliki seorang investor. Sama halnya seperti *hedging*, portofolio juga salah satu strategi untuk melindungi nilai opsi saham yang dimiliki investor. Portofolio dapat dibentuk dengan menggabungkan opsi saham dan saham pada posisi berlawanan, sehingga menghasilkan posisi yang bebas risiko [13]. Dengan demikian, dapat dibentuk nilai portofolio dengan nilai saham yang dilindungi *delta hedging*, yaitu

$$\Pi = V - \Delta S_t, \quad (2.5)$$

dengan :

Δ : *delta hedging*,
 V : nilai opsi saham,
 S_t : nilai saham.

Perubahan portofolio terhadap waktu dt , didefinisikan

$$d\Pi_t = dV_t - \Delta dS_t. \quad (2.6)$$

Persamaan (2.2) adalah nilai portofolio pada interval dt dan tanpa pembayaran dividen.

2.11 *Free of Arbitrage*

Free of arbitrage atau non arbitrase merupakan kesempatan untuk memperoleh keuntungan tanpa risiko. Arbitrase dilakukan oleh seorang investor untuk memperoleh keuntungan tanpa risiko salah satu caranya, yaitu masuk pada dua atau lebih pasar modal [13]. Kondisi yang memungkinkan terjadi kesempatan arbitrase adalah adanya perbedaan nilai saham antara pasar modal yang satu dengan yang lainnya. Teorema *free of arbitrage* dinyatakan sebagai berikut:

Teorema 2.1. *Nilai free of arbitrage diberikan oleh*

$$d\Gamma = r \Gamma dt,$$

dimana r adalah suku bunga.

2.12 *Brownian Motion*

Salah satu cara standar untuk memodelkan suatu proses stokastik dari variabel tertentu dalam waktu kontinu yang banyak digunakan adalah proses *Wiener*. Model ini mengambil namanya dari Norbert *Wiener* berdasarkan penelitiannya tentang proses stokastik pada tahun 1923 [17]. *Brownian motion* atau sering disebut juga dengan proses *Wiener*, merupakan proses *random walk* terskala dengan n berukuran besar. Perubahan nilai saham yang terjadi berlangsung dengan cepat. Berdasarkan faktor tersebut dapat dikatakan bahwa perubahan nilai saham mengikuti *Brownian motion*. *Brownian motion* merupakan proses stokastik dimana suatu perubahan terjadi dalam waktu yang cukup singkat.

Definisi 2.12.1. (*Brownian motion standar*) :

Jika $\{W(t) \mid 0 \leq t < \infty\}$ merupakan Brownian motion dengan parameter volatilitas σ^2 , maka $\left\{B(t) = \frac{1}{\sigma}W(t), 0 \leq t < \infty\right\}$ adalah Brownian motion dengan parameter volatilitas 1.

Berdasarkan Brownian *motion* standar, jika suatu variabel $B(t)$ mengikuti proses *Wiener*, maka berlaku 2 sifat, yaitu:

1. Perubahan $\Delta B(t) = Z\sqrt{\Delta t}$, dengan $Z \sim N(0, 1)$.
2. $B(t)$ mengikuti proses Markov. Proses Markov merupakan proses stokastik, jika diketahui nilai $B(t)$, maka $B(s + t)$ dengan $s + t > t$ tidak dipengaruhi $B(u)$ dengan $u < t$. Artinya jika diberikan keadaan saat sekarang dan keadaan di waktu lampau, maka keadaan mendatang hanya bergantung pada keadaan waktu sekarang dan tidak bergantung pada waktu lampau.

Definisi 2.12.2. (*Brownian motion geometrik*)

Jika $\{B(t), 0\}$ adalah Brownian motion dengan drift μ dan parameter volatilitas σ^2 , maka proses stokastik $\{X(t), t \geq 0\}$, yaitu

$$X(t) = X(0)e^{\mu t + \sigma B(t)}$$

Berdasarkan definisi tersebut diperoleh turunannya :

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t) \quad (2.7)$$

2.13 Proses Stokastik

Proses stokastik didefinisikan sebagai suatu variabel yang berkembang dari waktu ke waktu dengan cara yang acak atau tidak pasti, yaitu perubahan keadaan beberapa sistem dari waktu ke waktu bergantung pada kesempatan [17]. Proses stokastik juga merupakan himpunan variabel acak dalam bentuk $(X(t), t \in T)$, dimana untuk setiap $t \in T$, $X(t)$ adalah variabel acak. Variabel t adalah indeks yang menginterpretasikan waktu dan $X(t)$ adalah *state* dari proses pada saat t .

Proses stokastik merupakan proses diskrit namun juga bisa kontinu. Proses dikatakan proses diskrit jika $t \in T$

terbatas atau bisa dihitung, yaitu jika $T = 0, 1, 2, \dots, n$ menghasilkan proses waktu $X(0), X(1), X(2), \dots, X(n)$. Sebaliknya jika proses stokastik dikatakan kontinu jika $t \in T$ tidak terbatas. Artinya jika $T = [0, 1)$ atau $T = [0; k]$ untuk beberapa nilai k .

Proses stokastik banyak digunakan untuk memodelkan suatu sistem yang dijalankan pada suatu lingkungan yang tidak dapat diduga. nilai saham yang dipengaruhi pergerakan tingkat suku bunga merupakan salah satu contoh dari proses stokastik, karena pergerakannya cepat serta tidak pasti seiring dengan waktu.

2.14 Lemma Itô

Lemma Itô merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan integral stokastik. Lemma Itô menunjukkan suatu hubungan antara perubahan nilai *derivatives* dengan perubahan nilai opsi. Jika $f(P, t)$, merupakan fungsi kontinu yang dapat diturunkan secara parsial terhadap proses stokastik P dan waktu t , selanjutnya didefinisikan persamaan diferensial stokastik dari variabel P dengan tingkat *drift* $\mu(P, t)$ dan volatilitas $\sigma(P, t)$

$$dP = \mu(P, t)dt + \sigma(P, t)dZ$$

maka sebuah fungsi f dari P dan t akan mengikuti proses :

$$df(P, t) = \left[\mu P(t) \frac{\partial f(P, t)}{\partial P} + \frac{\partial f(P, t)}{\partial t} + \frac{\sigma^2 P(t)^2}{2} \frac{\partial^2 f(P, t)}{\partial P^2} \right] dt + \sigma P(t) \frac{\partial f(P, t)}{\partial P} dZ. \quad (2.8)$$

2.15 Rata-Rata Geometrik Opsi Asia

Rata-rata geometrik diskrit dinyatakan sebagai berikut

$$G(T) = \left[\prod_{i=1}^n S_{ti} \right]^{\frac{1}{T}}$$

dengan $i = 1, 2, \dots, n$. Untuk $n \rightarrow \infty$ maka rata-rata sampel diskrit menjadi rata-rata sampel kontinu, sehingga

$$\begin{aligned}
 G(T) &= \left[\prod_{i=1}^n S_{ti} \right]^{\frac{1}{T}} \\
 &= \exp \left[\ln \left[\prod_{i=1}^n S_{ti} \right]^{\frac{1}{T}} \right] \\
 &= \exp \left[\frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^n S_{ti} \right] \right] \\
 &= \exp \left[\frac{1}{T} \ln \left[\left(S_{tn} \right) \left(S_{tn-1} \right) \dots \left(S_{t1} \right) \left(S_{t0} \right) \right] \right] \\
 &= \exp \left[\frac{1}{T} \left[\ln \left(S_{tn} \right) + \ln \left(S_{tn-1} \right) + \dots + \ln \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left(S_{t2} \right) + \ln \left(S_{t1} \right) \right] \right].
 \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi jumlahan Riemann, yaitu

Definisi 2.15.1. *Integral fungsi kontinu didefinisikan sebagai limit jumlahan Riemann berikut*

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t.$$

Oleh karena itu berdasarkan Definisi (2.15.1), diperoleh

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \left(S_{tn} \right) + \ln \left(S_{tn-1} \right) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \ln \left(S_{t2} \right) + \ln \left(S_{t1} \right) \right) T,
 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 &= \exp \left[\frac{1}{T} \left[\sum_{i=1}^n \ln S_{ti} \right] \right] \\
 &\simeq \exp \left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt \right).
 \end{aligned}$$

Payoff Rata-rata geometrik diberikan oleh

$$C = \left[\left(G(T) \right)^l - K \right]^n$$

dimana l adalah konstan. Nilai rata-rata geometrik saat $t = 0$ adalah $g(S, K, T, r, \sigma, l)$. Opsi *call* Asia rata-rata geometrik diskrit ketika $t = 0$ maka $g(S, K, T, r, \sigma, 1)$. Sedangkan ketika $t_i = \frac{iT}{n}$ diberikan oleh nilai $\prod_{j=0}^{i+1} S_j^{\frac{1}{n+1}}$ dan $l = \frac{n-i+1}{n+1}$, sehingga

$$\left(\prod_{j=0}^{i-1} S_j \right)^{\frac{1}{n+1}} g \left(S_i, \frac{K}{\left(\prod_{j=0}^{i-1} S_j \right)^{\frac{1}{n+1}}}, T - i, r, \sigma, \frac{(n-i+1)}{n+1} \right).$$

Berdasarkan prinsip nilai *martingale*

$$g(S, K, T, r, \sigma, l) = E \left[\exp(-rT) (G(T)^l - K)^+ \right]$$

Teorema 2.2. *Nilai opsi call Asia rata-rata geometrik diskrit, diberikan oleh*

$$\begin{aligned}
 g(S, K, T, r, \sigma, l) = & S^l \exp \left(- \left(1 - \frac{l}{2} \right) rT - \left(l \sigma^2 \frac{T}{2} \right) \left(1 - \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{l(2n+1)}{6(n+1)} \right) \right) N(d_1) - K \exp(-rT) N(d_2)
 \end{aligned}$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S^l}{K}\right)\sqrt{6(n+1)}}{l\sigma\sqrt{(2n+1)T}} + \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{6(n+1)T}}{2l\sigma\sqrt{2n+1}} + \frac{l\sigma\sqrt{(2n+1)T}}{\sqrt{6(n+1)}}$$

$$d_2 = d_1 - \frac{l\sigma\sqrt{(2n+1)T}}{\sqrt{6(n+1)}}$$

Bukti. Diberikan $S_0 = S$, $t_i = \frac{iT}{n}$, S_i dinyatakan

$$S_i = S_{i-1} \exp\left(r - \frac{\sigma^2}{2}h + \sigma\sqrt{h}Z_i\right),$$

dimana Z_i adalah independen identik variat distribusi normal standar dan $h = \frac{T}{n}$, diperoleh

$$\log S_i = \log S_{i-1} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)ih + \sigma\sqrt{h}(Z_1 + \dots + Z_i).$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} \log G(T)^l &= \frac{l}{n+1} \sum_{i=0}^n \log(S_i) \\ &= \frac{l}{n+1} \left[(n+1)\log(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)h \left(\sum_{i=0}^n i\right) \right. \\ &\quad \left. + \sigma\sqrt{h} \left(nZ_1 + (n-1)Z_2 + \dots + Z_n\right) \right] \\ &= \log(S_0)l + l \frac{T}{2\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)} + l\sigma\sqrt{\frac{(2n+1)T}{6(n+1)}}Z \end{aligned}$$

dengan $Z = \frac{(nZ_1 + (n-1)Z_2 + \dots + Z_n)}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$ dan Z adalah variat distribusi normal standar.

Karena logaritma dari $G(T)^l$ adalah distribusi normal dengan rata-rata \hat{a} dan varians \hat{b}^2 dimana

$$\hat{a} = d\log(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)l\frac{T}{2}$$

dan

$$\hat{b}^2 = \frac{(2n+1)Tl^2\sigma^2}{6(n+1)}.$$

Berdasarkan

$$G(T)^l = \hat{S}_0 \exp\left(\hat{\mu}T + \hat{\sigma}\sqrt{T}Z - \sigma^2\frac{T}{2}\right)$$

dengan

$$\begin{aligned}\hat{S}_0 &= S_0^l \\ \hat{\sigma} &= l\sigma\sqrt{\frac{(2n+1)}{6(n+1)}} \\ \hat{\mu} &= \left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{r - \sigma^2}{2}\right) + \frac{l^2\sigma^2(2n+1)}{12(n+1)}\end{aligned}$$

Menurut teori Black-Scholes:

$$\begin{aligned}E\left[\exp(-rT)\left(G(T)^l\right)^+ - K\right] &= \\ \hat{S}_0 \exp\left((\hat{\mu} - r)T\right)N(d_1) - K \exp(-rT)N(d_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\log\left(\frac{\hat{S}_0}{K}\right)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} + \left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} + \frac{\hat{\sigma}}{2}\right)\sqrt{T} \\ d_2 &= d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}.\end{aligned}$$

2.16 Persamaan Diferensial Parsial Black-Scholes

Model Black-Scholes adalah metode yang dipopulerkan oleh Fischer Black dan Myron Scholes pada tahun 1973 untuk menentukan harga teoritis European opsi *call* [13]. Asumsi-asumsi yang digunakan dalam model Black-Scholes adalah :

1. Nilai aset berdistribusi lognormal dengan parameter μ dan σ^2 yang diketahui dan konstan.
2. *Continuously compounded return* berdistribusi normal dengan μ dan σ^2 konstan.
3. Penjualan aset untuk efisiensi diperbolehkan.
4. Tidak ada biaya transaksi atau pajak.
5. Tidak ada dividen selama masa hidup opsi.
6. Tidak ada kesempatan bagi arbitras.
7. Perdagangan aset keuangan bersifat kontinu.
8. Tingkat suku bunga bebas resiko konstan dan sama untuk semua perdagangan opsi.

Nilai opsi *call* Eropa dapat dihitung dengan menggunakan *risk neutral valuation* yaitu menentukan harga opsi dengan membawanya ke dalam dunia *risk-neutral*. Dengan mengasumsikan tingkat pengembalian yang diharapkan adalah *risk free interest rate*, $\mu = r$, kemudian mencari nilai saat ini dari ekspektasi *cash flow* saat jatuh tempo dengan menggunakan *risk free interest rate*. Nilai opsi saat ini merupakan *expected value* yang didiskon dan dinotasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C &= e^{-rT} E[\text{payoff}] \\ &= e^{-rT} E[\max(S(T) - K, 0)]. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan *risk neutral valuation*, diperoleh nilai opsi *call* Eropa adalah

$$C = S(0)N[d_1] - Ke^{-rT}N[d_2]$$

dengan,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}T\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}T\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

2.17 Persamaan Model Opsi Asia Rata-Rata Geometrik Tipe Eropa

Dalam Tugas Akhir ini akan digunakan persamaan diferensial parsial dari persamaan opsi Asia rata-rata geometrik dengan *fixed strike price* sebagai berikut [20]:

$$\xi = \frac{t \ln J + (T - t) \ln S}{T}, \quad (2.9)$$

$$V = U = u(\xi, t). \quad (2.10)$$

Persamaan (2.6) dan (2.7) ditransformasi, sehingga diperoleh:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{T-t}{T}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \left(\frac{T-t}{T}\right) \frac{\partial U}{\partial \xi} - rU = 0, \\ U|_{t=T} = (e^\xi - K)^2. \end{cases} \quad (2.11)$$

Misalkan

$$W = Ue^{\beta(t)}, \quad (2.12)$$

$$\eta = \xi + \alpha(t), \quad (2.13)$$

$$\tau = \gamma(t). \quad (2.14)$$

Substitusikan hasil transformasi Persamaan (2.9)-(2.11) ke persamaan (2.8) sehingga didapatkan persamaan diferensial opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa berikut :

$$\gamma'(t) \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{T-t}{T} \right)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right] + \frac{\partial W}{\partial \eta}$$

$$-(r + \beta'(t))W = 0,$$

diberikan

$$\alpha'(t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) = 0,$$

$$r + \beta'(t) = 0,$$

$$\gamma' = -\frac{T-t^2}{T},$$

dan kondisi awal

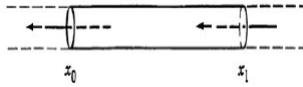
$$\alpha(T) = \beta(T) = \gamma(T) = 0,$$

dengan,

- W : nilai Opsi ,
- τ : selisih antara T dan t ,
- η : nilai opsi saat ini yang diperdagangkan,
- t : waktu sampai pada jatuh tempo,
- T : waktu jatuh tempo,
- σ : fluktuasi nilai opsi (*volatility*),
- r : tingkat suku bunga bebas risiko,
- α, β, γ : konstanta.

2.18 Persamaan Difusi

Persamaan difusi dapat diilustrasikan sebagai sebuah cairan bergerak secara perlahan mengisi sebuah pipa lurus dan sebuah zat pencemar menyebar pada cairan tersebut dengan selang $[x_0, x_1]$. Zat pencemar tersebut bergerak dari konsentrasi tinggi ke konsentrasi rendah.



Gambar 2.1: Ilustrasi Persamaan Difusi

Jika $u(x, t)$ adalah konsentrasi (massa per satuan panjang) dari zat dengan posisi x pada waktu t . Maka massa zat pada selang tersebut diperoleh dari integral konsentrasi $f(x, t)$ yaitu $M = \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx$ sehingga,

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx. \quad (2.15)$$

Perubahan massa pada selang tersebut juga bergantung pada zat masuk dan zat keluar pada selang tersebut. Hukum *Fick* mengatakan bahwa perubahan massa pada selang $[x_0, x_1]$ terhadap waktu sebanding dengan selisih antara zat masuk dan zat keluar, maka perubahan massa pada selang tersebut adalah

$$\frac{dM}{dt} = k \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, t) - k \frac{\partial}{\partial x_0} u(x_0, t) \quad (2.16)$$

M adalah konstanta massa dari konsentrasi, $u(x, t)$ adalah konsentrasi pada posisi x , waktu t , dan k adalah konstanta.

Berdasarkan Persamaan (2.15) dan (2.16), sehingga

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx &= k \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, t) - k \frac{\partial}{\partial x_0} u(x_0, t) \\
 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx &= k \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) dx \\
 \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= k \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t).
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Persamaan (2.17) disebut persamaan difusi. Solusi umum untuk Persamaan (2.17) [19], yaitu

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy. \tag{2.18}$$

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam pengerjaan Tugas Akhir secara rinci. Metode penelitian yang digunakan berguna sebagai acuan agar Tugas Akhir ini dapat berjalan secara sistematis. Diagram alir pengerjaan Tugas Akhir ini ditunjukkan pada Gambar 3.1. Tahapan dalam pengerjaan Tugas Akhir ini dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan adalah identifikasi masalah. Kemudian mencari materi atau sumber pendukung dari permasalahan yang diambil, yaitu tentang penerapan metode *perturbation* pada perhitungan nilai opsi Asia baik dari jurnal ilmiah, buku, artikel, dan lain sebagainya. Bahan yang harus dikaji antara lain metode *perturbation* untuk penyelesaian persamaan differensial, dan analisis model matematika untuk perhitungan nilai opsi Asia.

2. Penurunan persamaan diferensial

Pada tahap ini dilakukan penurunan persamaan diferensial opsi Asia rata-rata geometrik untuk mendapatkan persamaan diferensial opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa.

3. Reduksi persamaan diferensial

Pada tahap ini persamaan diferensial opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa akan direduksi dengan cara ditransformasi untuk mendapatkan persamaan diferensial

yang akan diselesaikan menggunakan metode *perturbation*.

4. Mendapatkan solusi persamaan diferensial dengan metode *perturbation*

Pada tahap ini persamaan diferensial yang telah direduksi akan diselesaikan menggunakan metode *perturbation* dengan kondisi batas yang harus dipenuhi serta akan dilakukan pendugaan parameter *perturbation*.

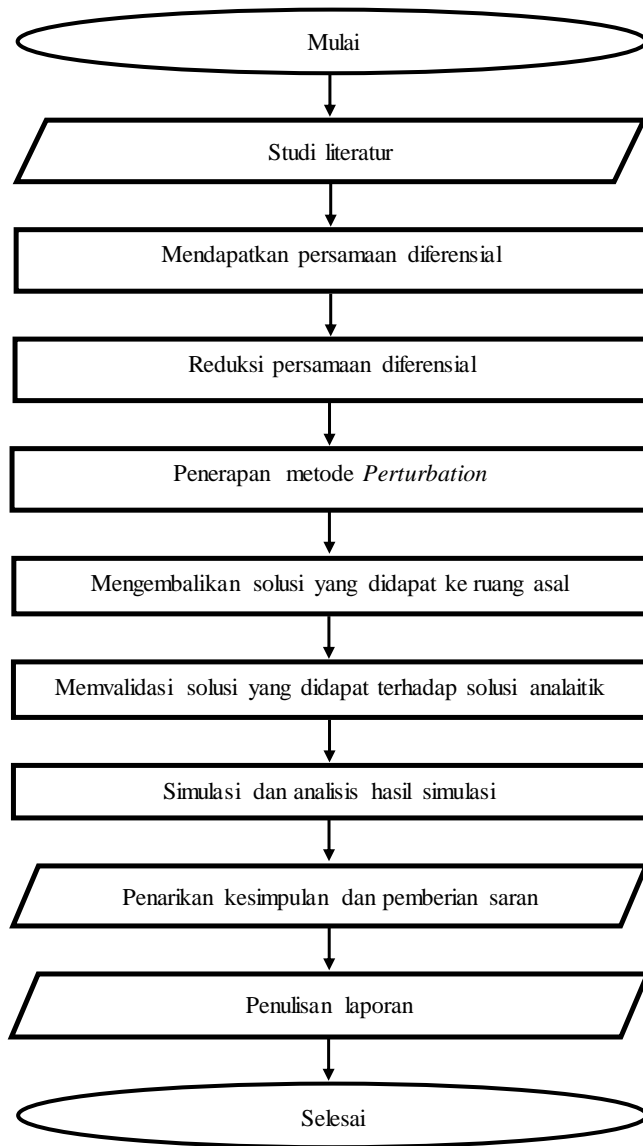
5. Mengembalikan solusi yang didapat ke ruang asal
Pada tahap ini akan dilakukan pengembalian persamaan diferensial ke ruang asal dari solusi yang didapat pada tahap sebelumnya.

6. Memvalidasi solusi yang didapat terhadap solusi analitik
Pada tahap ini akan dilakukan validasi dilakukan dengan cara membandingkan antara hasil simulasi solusi *perturbation* dan simulasi solusi analitik untuk mengetahui keakuratan metode *perturbation*.

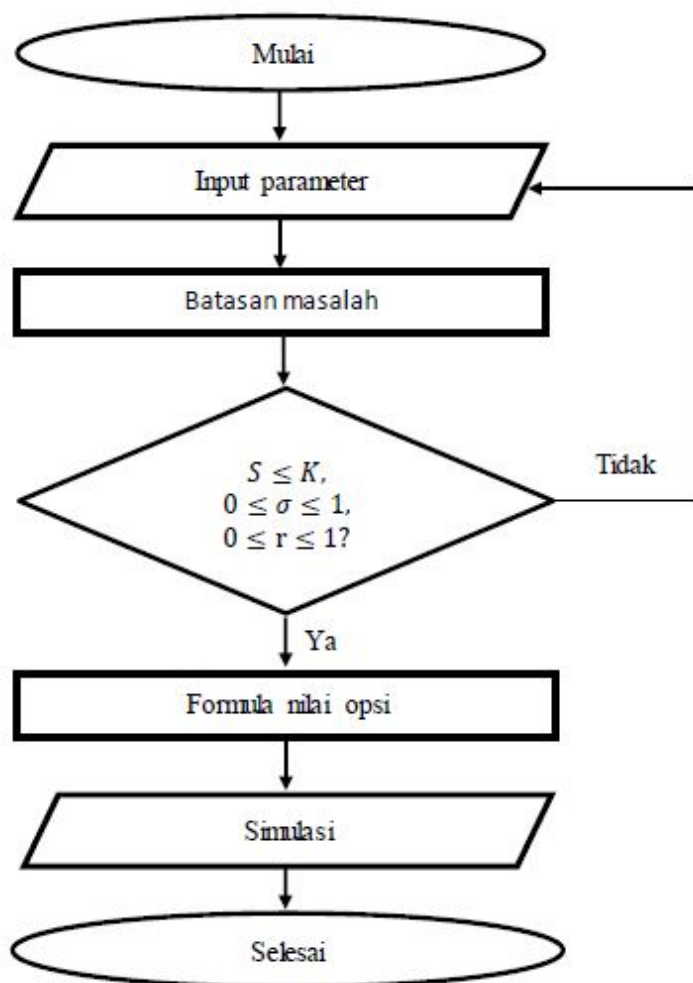
7. Simulasi dan Analisis Hasil Simulasi
Pada tahap ini akan dilakukan analisis hasil simulasi menggunakan *software* MATLAB dari solusi model opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa. Terdapat diagram alir simulasi pada Gambar 3.2.

8. Penarikan Kesimpulan dan Pemberian Saran
Setelah dilakukan analisa dari hasil simulasi menggunakan *software* MATLAB, maka penarikan kesimpulan dari Tugas Akhir ini dapat dilakukan sekaligus pemberian saran guna perbaikan dan pengembangan atas Tugas Akhir ini.

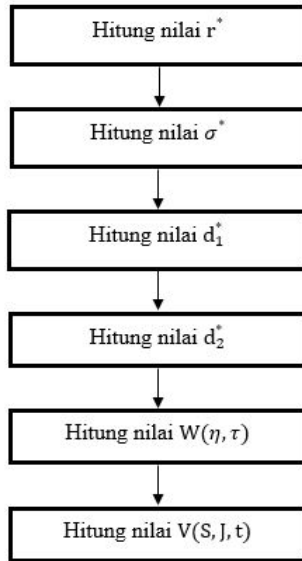
9. Penulisan Laporan
Pada tahap terakhir adalah penulisan Tugas Akhir yang meliputi hasil kajian mengenai permasalahan yang dibahas dalam bentuk laporan Tugas Akhir.



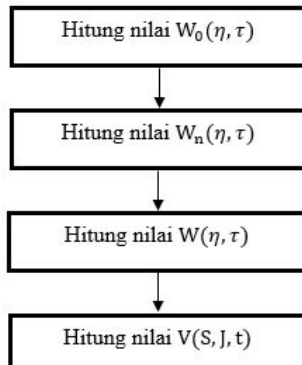
Gambar 3.1: Diagram Alir Pengerjaan Tugas Akhir



Gambar 3.2: Diagram Alir Simulasi



Gambar 3.3: Diagram Alir Formula Nilai Opsi Analitik



Gambar 3.4: Diagram Alir Formula Nilai Opsi numerik

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas perhitungan nilai opsi Asia dari persamaan diferensial parsial opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa menggunakan metode *Perturbation*. Pembahasan dimulai dengan menentukan perumusan nilai opsi saham. Kemudian dilanjutkan dengan perumusan model portfolio dengan *risk-free*. Selanjutnya dijelaskan secara detail mengenai pembentukan persamaan diferensial opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa dan solusi analitiknya. Diakhir pembahasan dijelaskan mengenai penerapan metode *Perturbation* dan analisisnya, serta disimulasikan menggunakan *software* MATLAB.

4.1 Pergerakan Nilai Saham dan Rata-Rata Geometrik Berdistribusi Lognormal

Dalam bab ini akan dijelaskan mengenai pembuktian penentuan nilai saham dan rata-rata geometrik dalam nilai opsi Asia berdistribusi lognormal. Penentuan nilai opsi Asia menggunakan rata-rata geometrik dapat dilakukan dengan cara menggunakan metode *perturbation*. Dengan syarat, harus memenuhi asumsi kelognormalan dari rata-rata geometrik nilai saham.

4.1.1 Pergerakan Nilai Saham

Dalam subbab ini akan ditunjukkan bahwa pergerakan nilai saham mengikuti Brownian *motion* dan berdistribusi logaritma. Asumsikan $S(t_1)$ merupakan nilai saham pada saat t_1 . Untuk periode waktu Δt , ekspektasi perubahan ΔS adalah $\mu S(t_i)\Delta t$ dengan μ adalah tingkat pengembalian dari

nilai saham yang diharapkan. Jika volatilitas dari tingkat pengembalian selalu nol maka tingkat pengembalian akan bernilai tetap untuk setiap interval waktu. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} E(\text{return} = c) &= c \\ \mu &= c. \end{aligned}$$

Untuk tingkat pengembalian yang diharapkan per periode waktu Δt , didapat

$$\mu = \frac{\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)}}{\Delta t}$$

Sehingga perubahan nilai saham dapat dimodelkan dengan

$$\Delta S = \mu S(t_i) \Delta t,$$

dimana,

$$\Delta S = S(t_{i+1}) - S(t_i).$$

Namun dalam aplikasinya, volatilitas dari tingkat pengembalian tidak selalu bernilai nol. Artinya seorang investor memiliki tingkat pengembalian tak tentu untuk nilai saham pada waktu yang berbeda. Secara matematis ditulis

$$\begin{aligned} \frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)} &= \mu \Delta t + \sigma \Delta B(t) \\ S(t_{i+1}) - S(t_i) &= S(t_i)(\mu \Delta t + \sigma \Delta B(t)) \\ \Delta S &= S(t_i)\mu \Delta t + S(t_i)\sigma \Delta B(t), \end{aligned} \tag{4.1}$$

atau dijabarkan menjadi

$$\begin{aligned} S(t_{i+1}) - S(t_i) &= \mu S(t_i) \Delta t + \sigma S(t_i) \Delta B(t), \\ S(t_{i+1}) &= S(t_i) + \mu S(t_i) \Delta t + \sigma S(t_i) \Delta B(t), \end{aligned}$$

dimana $B(t)$ merupakan Brownian *motion* standar. Menurut sifat Brownian *motion*, persamaan diatas dapat dituliskan menjadi

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) + \mu S(t_i)\Delta t + \sigma S(t_i)\sqrt{\Delta t}Z_t.$$

Dengan $Z_t \sim NIID(0,1)$ dan $\Delta t \rightarrow 0$, Persamaan (4.1) menjadi sebuah persamaan diferensial stokastik dengan waktu kontinu

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t). \quad (4.2)$$

Persamaan (4.2) mempunyai solusi sebagai berikut [18] :

$$S(t) = S(0)e^{\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)\right)}, \quad (4.3)$$

Diketahui Persamaan (4.1) memiliki bentuk yang sesuai dengan Persamaan (2.7), sehingga dengan demikian dapat dikatakan bahwa pergerakan nilai saham mengikuti Brownian *motion*. Selanjutnya, dari Persamaan (4.3) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{S(t)}{S(0)} &= e^{\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)\right)}, \\ \ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) &= \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma B(t). \end{aligned}$$

Diketahui $B(t) \sim N(0,t)$, maka dapat dicari *mean* dan variansi untuk distribusi nilai saham, yaitu

1. *mean* untuk distribusi nilai saham,

$$E\left[\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma B(t)\right] = E[\mu t] - E\left[\frac{1}{2}\sigma^2 t\right] + E[\sigma B(t)]$$

$$\begin{aligned}
&= \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + 0 \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t
\end{aligned}$$

2. variansi untuk distribusi nilai saham,

$$\begin{aligned}
\text{var} \left[\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma B(t) \right] &= \text{var} [\sigma B(t)] \\
&= \sigma^2 \text{var} [B(t)] \\
&= \sigma^2 t.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan asumsi *risk neutral*, yaitu asumsi bahwa tingkat pengembalian diharapkan sama dengan *risk free interest rate*, $\mu = r$, didapatkan

$$\begin{aligned}
\ln \left(\frac{S(t)}{S(0)} \right) &\sim N \left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right) \\
\ln S(t) - \ln S(0) &\sim N \left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right).
\end{aligned}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa distribusi dari logaritma nilai saham $S(t)$, yaitu

$$\ln S(t) \sim N \left(\ln S(0) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \right)$$

Misalkan $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ dan $\Delta t = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_{n+1} - t_n$, sehingga Persamaan (4.3) menjadi

$$\begin{aligned}
S(t) &= S(0) e^{\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t-0) + \sigma Z \sqrt{t-0} \right)} \\
S(t_2) &= S(t_1) e^{\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_2-t_1) + \sigma Z \sqrt{t_2-t_1} \right)} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned}$$

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) e^{\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z \right)} \quad (4.4)$$

4.1.2 Rata-Rata Geometrik dalam Opsi Asia

Karakteristik utama rata-rata geometrik dalam kasus opsi Asia adalah ketika nilai saham berdistribusi lognormal, rata-rata geometrik nilai sahamnya juga berdistribusi lognormal. Berdasarkan Persamaan (4.4), diperoleh

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) e^{\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_i \right)}$$

$$\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)} = e^{\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_i \right)}$$

$$\ln \left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)} \right) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_i \quad (4.5)$$

Telah diketahui bahwa *payoff* opsi *call* adalah $\max(S(T) - K, 0)$. Oleh karena *payoff* opsi Asia bergantung pada rata-rata nilai saham, maka nilai saham saat jatuh tempo, disubstitusi dengan rata-rata geometrik menjadi $\left(\left(\prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{\frac{1}{n}} - K, 0 \right)$. Jika dijabarkan, maka

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n S(t_i) &= S(t_1) S(t_2) \dots S(t_{n-1}) S(t_n), \\ &= S(t_n) S(t_{n-1}) \dots S(t_2) S(t_1), \end{aligned}$$

dengan $t_i = i\Delta t$ dan $n\Delta t = T$, sehingga

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n S(t_i) &= \left(\frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})} \right)^1 \left(\frac{S(t_{n-1})}{S(t_{n-2})} \right)^2 \cdots \left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)} \right)^{n-1} \\ &\quad \left(\frac{S(t_1)}{S(t_0)} \right)^n (S(t_0))^n \\ \frac{\prod_{i=1}^n S(t_i)}{(S(t_0))^n} &= \left(\frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})} \right)^1 \left(\frac{S(t_{n-1})}{S(t_{n-2})} \right)^2 \cdots \left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)} \right)^{n-1} \\ &\quad \left(\frac{S(t_1)}{S(t_0)} \right)^n \\ \ln \left(\frac{\prod_{i=1}^n S(t_i)}{(S(t_0))^n} \right) &= \ln \left(\frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})} \right)^1 + \ln \left(\frac{S(t_{n-1})}{S(t_{n-2})} \right)^2 + \cdots + \\ &\quad \ln \left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)} \right)^{n-1} + \ln \left(\frac{S(t_1)}{S(t_0)} \right)^n \\ \ln \left(\frac{\prod_{i=1}^n S(t_i)}{(S(t_0))^n} \right) &= \ln \left(\frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})} \right) + 2\ln \left(\frac{S(t_{n-1})}{S(t_{n-2})} \right) + \cdots + \\ &\quad (n-1)\ln \left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)} \right) + n\ln \left(\frac{S(t_1)}{S(t_0)} \right) \quad (4.6) \end{aligned}$$

Substitusikan Persamaan (4.5) ke Persamaan (4.6), diperoleh

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\prod_{i=1}^n S(t_i)}{(S(t_0))^n} \right) &= \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_{n-1} \right) + 2 \\ &\quad \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_{n-2} \right) + \cdots + \\ &\quad n \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + n\sigma \sqrt{\Delta t} Z_0 \quad (4.7) \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari *mean* dan variansi untuk distribusi dari logaritma rata-rata geometrik, yaitu

1. *mean* logaritma rata-rata geometrik

$$\begin{aligned}
 E \left[\ln \left(\frac{(\prod_{i=1}^n S(t_i))^{\frac{1}{n}}}{S(0)} \right) \right] &= E \left[\ln \left(\frac{\prod_{i=1}^n S(t_i)}{(S(t_0))^n} \right)^{\frac{1}{n}} \right] \\
 &= E \left[\frac{1}{n} \ln \left(\frac{\prod_{i=1}^n S(t_i)}{(S(t_0))^n} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{n} E \left[\ln \left(\frac{\prod_{i=1}^n S(t_i)}{(S(t_0))^n} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Persamaan (4.7), ekspektasi diatas dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
 E \left[\ln \left(\frac{(\prod_{i=1}^n S(t_i))^{\frac{1}{n}}}{S(0)} \right) \right] &= \frac{1}{n} E \left[\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_{n-1} \right) \right. \\
 &\quad + 2 \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_{n-2} \right) \\
 &\quad + \dots + \left. \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_0 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{n} \left(E \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_{n-1} \right] \right. \\
 &\quad + 2 E \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_{n-2} \right] + \\
 &\quad \left. \dots + n E \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_0 \right] \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} \left(\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} E[Z_{n-1}] \right) + 2 \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} E[Z_{n-2}] \right) + \dots + \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} E[Z_0] \right) \right)$$

Diberikan $Z_i \sim NIID(0, 1)$, sehingga

$$\begin{aligned} E \left[\ln \left(\frac{(\prod_{i=1}^n S(t_i))^{\frac{1}{n}}}{S(0)} \right) \right] &= \frac{1}{n} \left(\left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t \right) \right. \\ &\quad + 2 \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t \right) \\ &\quad \left. + \dots + \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t (1 + 2 + \\ &\quad 3 + \dots (n-1) + n) \quad (4.8) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan pemisalan

$$H_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \quad (4.9)$$

H_n merupakan deret aritmatika dengan bilangan asli dari 1 sampai n . Dapat dituliskan kembali menjadi

$$H_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \quad (4.10)$$

Jumlahkan Persamaan (4.9) dan (4.10) diperoleh

$$\begin{aligned} 2H_n &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) \\ 2H_n &= n(n+1) \\ H_n &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Dengan demikian didapatkan

$$\begin{aligned}
 E \left[\ln \left(\frac{(\prod_{i=1}^n S(t_i))^{\frac{1}{n}}}{S(0)} \right) \right] &= \frac{1}{n} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t H_n \\
 &= \frac{1}{n} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

2. variansi logaritma rata-rata geometrik

$$\begin{aligned}
 var \left[\ln \left(\frac{(\prod_{i=1}^n S(t_i))^{\frac{1}{n}}}{S(0)} \right) \right] &= var \left[\ln \left(\frac{\prod_{i=1}^n S(t_i)}{(S(t_0))^n} \right)^{\frac{1}{n}} \right] \\
 &= var \left[\frac{1}{n} \ln \left(\frac{\prod_{i=1}^n S(t_i)}{(S(t_0))^n} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} var \left[\ln \left(\frac{\prod_{i=1}^n S(t_i)}{(S(t_0))^n} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.7), persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned}
 var \left[\ln \left(\frac{(\prod_{i=1}^n S(t_i))^{\frac{1}{n}}}{S(0)} \right) \right] &= \frac{1}{n^2} var \left[\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_{n-1} \right) \right. \\
 &\quad + 2 \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_{n-2} \right) + \dots \\
 &\quad \left. + \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_0 \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2} \left(\text{var} \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_{n-1} \right] + 4 \text{var} \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_{n-2} \right] + \dots + n^2 \text{var} \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_0 \right] \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \left(\Delta t \sigma^2 \text{var} [Z_{n-1}] + 4 \Delta t \sigma^2 \text{var} [Z_{n-2}] + \dots + n^2 \Delta t \sigma^2 \text{var} [Z_0] \right)
\end{aligned}$$

Diberikan $Z_i \sim NIID(0, 1)$, sehingga

$$\begin{aligned}
&\text{var} \left[\ln \left(\frac{(\prod_{i=1}^n S_{(t_i)})^{\frac{1}{n}}}{S(0)} \right) \right] \\
&= \frac{1}{n^2} \left(\sigma^2 \Delta t + 2^2 \sigma^2 \Delta t + \dots + (n-1)^2 \sigma^2 \Delta t + n^2 \sigma^2 \Delta t \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \sigma^2 \Delta t (1 + 2^2 + \dots + n - 1^2 + n^2) \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Dengan memisalkan Persamaan (4.12) menjadi

$$V_n = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 \tag{4.13}$$

Diketahui bahwa V_n deret aritmatika dengan bilangan asli kuadrat dari 1 sampai n . Berdasarkan Persamaan (4.9), yaitu

$$H_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

Maka rasio Persamaan (4.13) dengan Persamaan (4.9) adalah

$$\begin{aligned}
\frac{V_n}{H_n} &= \frac{1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n} \\
\frac{V_n}{H_n} &= \frac{1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2}{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Dengan menguraikan indeks Persamaan (4.14), didapatkan

$$\begin{aligned}
 \frac{V_1}{H_1} &= 1 \\
 \frac{V_2}{H_2} &= \frac{1+4}{1+2} \\
 \frac{V_3}{H_3} &= \frac{1+4+9}{1+2+3} \\
 \frac{V_4}{H_4} &= \frac{1+4+9+16}{1+2+3+4} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \frac{V_n}{H_n} &= \frac{2n+1}{3}
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Persamaan (4.14), diperoleh

$$\begin{aligned}
 V_n &= \frac{2n+1}{3} H_n \\
 V_n &= \frac{2n+1}{3} \frac{n(n+1)}{2} \\
 V_n &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

Substitusikan hasil akhir V_n ke Persamaan (4.12), didapatkan

$$\text{var} \left[\ln \left(\frac{(\prod_{i=1}^n S(t_i))^{\frac{1}{n}}}{S(0)} \right) \right] = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \sigma^2 T \quad (4.15)$$

Berdasarkan hasil Persamaan (4.11) dan (4.15), diperoleh

$$\begin{aligned}
 \ln \left(\frac{(\prod_{i=1}^n S_{(t_i)})^{\frac{1}{n}}}{S(0)} \right) &\sim N \left(\frac{(n+1)}{2n} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T, \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \sigma^2 T \right) \\
 \ln \left(\frac{(\prod_{i=1}^n S_{(t_i)})^{\frac{1}{n}}}{S(0)} \right) &\sim N \left(\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \right) T, \hat{\sigma}^2 T \right) \\
 \ln \left(\left(\prod_{i=1}^n S_{(t_i)} \right)^{\frac{1}{n}} \right) &\sim N \left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \right) T, \hat{\sigma}^2 T \right),
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

dengan :

$S(0)$: nilai saham saat $t = 0$,

T : waktu jatuh tempo,

n : banyaknya nilai saham yang dihitung

$\hat{\mu}$: $\frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{n+1}{2n}$

$\hat{\sigma}^2$: $\frac{\sigma^2(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

Persamaan (4.16) menunjukkan bahwa logaritma rata-rata geometrik nilai saham berdistribusi normal, yang berarti bahwa rata-rata geometrik nilai saham berdistribusi lognormal.

4.2 Penurunan Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial awal yang digunakan pada pembahasan ini adalah persamaan diferensial opsi Asia. Pembahasan dimulai dengan menentukan nilai opsi saham. Kemudian dilanjutkan dengan perumusan model portfolio dengan *risk-free*. Selanjutnya dijelaskan secara detail mengenai pembentukan persamaan diferensial opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa dan solusi analitiknya.

4.2.1 Pembentukan Persamaan Opsi Asia

Asumsi yang digunakan dalam penurunan persamaan diferensial parsial model Black-Scholes adalah opsi saham hanya dapat dieksekusi saat *expiry date*, volatilitas nilai saham konstan, tingkat bunga bebas risiko, dan tidak ada pembayaran dividen [12]. Dasar dari penurunan persamaan diferensial parsial Black-Scholes adalah portofolio. Berikut ini merupakan cara untuk mendapatkan persamaan diferensial parsial Black-Scholes. Diberikan nilai opsi saham:

$$V = v(S, J, t),$$

dan portofolio sesuai Persamaan (2.5)

$$\square = v(S, J, t) - \Delta S,$$

dengan \square adalah portofolio, Δ menyatakan *delta hedging*, $v(S, J, t)$ adalah nilai opsi saham pada saat t dengan nilai aset S dan jumlah rata-rata J . Pada persamaan di atas tidak terdapat komponen acak sehingga portofolio ini dikatakan tidak beresiko (*riskless*) pada waktu t . Berdasarkan Teorema (2.1)

$$\begin{aligned} d\square &= r\square dt \\ &= r(V - \Delta S)dt. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Dimana V merupakan nilai opsi saham atas nilai saham S pada saat t . Karena Persamaan (4.17) merupakan bagian dari matematika terapan khususnya dalam bidang matematika keuangan maka Persamaan (4.17) mengikuti lemma Itô dan karena dalam Tugas Akhir ini mengikuti penurunan persamaan diferensial parsial model Black-Scholes,

diperoleh

$$\begin{aligned}
 d\Gamma &= dV - \Delta dS \\
 &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial J} dJ - \Delta dS \\
 &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial J} dJ - \Delta dS \\
 &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial J} \frac{dJ}{dt} \right) dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS.
 \end{aligned}$$

Diketahui bahwa delta menyatakan turunan pertama dari nilai opsi saham terhadap saham, sesuai Persamaan (2.4) dinyatakan dengan $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, maka persamaan diatas menjadi

$$\begin{aligned}
 d\Gamma &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial J} \frac{dJ}{dt} \right) dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial S} \right) dS \\
 &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial J} \frac{dJ}{dt} \right) dt. \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

Karena nilai portofolio (Γ) tidak memuat komponen acak sehingga nilai $d\Gamma$ pada persamaan dibawah ini merupakan nilai bebas risiko selama selang waktu dt . Oleh karena itu, nilai portofolio $d\Gamma$ akan sebanding dengan nilai portofolio $d\Gamma$ pada periode waktu dt dengan tingkat suku bunga bebas risiko r . Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial J} \frac{dJ}{dt} \right) dt &= r(V - \Delta S)dt \\
 \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial J} \frac{dJ}{dt} &= rV - r \frac{\partial V}{\partial S} S \\
 \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial J} \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV &= 0, \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

dengan :

V : nilai opsi saham,
 J : rata-rata opsi saham,
 S : nilai saham,
 t : waktu sampai pada jatuh tempo,
 σ : fluktuasi nilai opsi (volatilitas),
 r : tingkat suku bunga bebas risiko.

Persamaan (4.19) biasanya dikenal sebagai persamaan diferensial parsial Black-Scholes untuk menentukan nilai opsi Asia [21].

4.2.2 Pembentukan Persamaan Opsi Asia Rata-Rata Geometrik

Berdasarkan persamaan (4.19) dapat dilihat bahwa ada tiga peubah, yaitu t , S , dan J . Hal ini tentu saja sulit untuk menentukan solusinya. Dengan cara numerik pun, mencari solusi dari Persamaan (4.19) akan memakan waktu cukup lama. Salah satu asumsi Black-scholes yaitu nilai aset dasar mengikuti proses Wiener yang mempunyai distribusi lognormal dengan parameter *mean* dan variansi yang diketahui dan konstan.

Ketika nilai saham berdistribusi lognormal, maka rata-rata aritmatika nilai sahamnya tidak berdistribusi lognormal. Sehingga dalam Tugas Akhir ini menggunakan rata-rata geometrik. Diketahui rata-rata geometrik, yaitu

$$J_t = e^{\frac{1}{t} \int_0^t \ln S_\tau d\tau} \quad (4.20)$$

Persamaan (4.20) diturunkan terhadap dt , sehingga diperoleh

$$\frac{dJ_t}{dt} = J_t \left[\frac{\ln S_t - \ln J_t}{t} \right]. \quad (4.21)$$

Substitusikan Persamaan (4.21) ke (4.19), dengan batasan kondisi $\{0 \leq S < \infty, 0 \leq t \leq T\}$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + J \frac{\ln S - \ln J}{t} \frac{\partial V}{\partial J} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (4.22)$$

$$V(S, J, T) = \begin{cases} (J - K)^+ \\ (K - J)^+ \\ (S - J)^+ \\ (J - S)^+ \end{cases} \quad (4.23)$$

Dimana $(J - K)^+$ adalah opsi *call* dengan *fixed strike price*, $(K - J)^+$ adalah opsi *put* dengan *fixed strike price*, $(S - J)^+$ adalah opsi *call* dengan *floating strike price* dan $(J - S)^+$ adalah opsi *put* dengan *floating strike price*. Persamaan (4.22) merupakan persamaan hiperbolik 2-D. Untuk menyelesaikan Persamaan (4.22) dan (4.23), harus direduksi ke persamaan hiperbolik 1-D dengan cara ditransformasi. Semua persamaan opsi Asia dapat ditransformasi ke persamaan hipolerbolik 1-D, namun hanya persamaan opsi Asia rata-rata geometrik yang mempunyai penyelesaian analitiknya.

Selanjutnya, dalam pengerjaan Tugas Akhir ini akan diselesaikan untuk opsi *call* dengan *fixed strike price* saja. Dengan menggunakan pemisalan:

$$\xi = \frac{t \ln J + (T - t) \ln S}{T}, \quad (4.24)$$

$$V = U = u(\xi, t). \quad (4.25)$$

Persamaan (4.24) dan (4.25) ditransformasi, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (U(\xi, t)) (1) + \frac{\partial}{\partial t} (U(\xi, t)) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t \ln J + (T-t) \ln S}{T} \right) \\
&= \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t \ln J}{T} + \ln S - \frac{t \ln S}{T} \right) \\
&= \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \xi} \left(\frac{\ln J}{T} - \frac{\ln S}{T} \right), \\
\frac{\partial V}{\partial J} &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial J} \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} (U(\xi, t)) \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{t \ln J}{T} + \ln S - \frac{t \ln S}{T} \right) \\
&= \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{t}{T J}, \\
\frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial S} \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} (U(\xi, t)) \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{t \ln J}{T} + \ln S - \frac{t \ln S}{T} \right) \\
&= \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{T-t}{T S}, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{T-t}{T S} \right) \\
&= \frac{\partial U}{\partial \xi} \left(-\frac{T-t}{T S^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \left(-\frac{T-t}{T S} \right) \right) \frac{T-t}{T S} \\
&= \left(\frac{T-t}{T S} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{T-t}{T S^2} \frac{\partial U}{\partial \xi}.
\end{aligned}$$

Substitusikan hasil transformasi Persamaan (4.24) dan (4.25) ke (4.22) dan (4.23), sehingga didapatkan persamaan diferensial opsi Asia rata-rata geometrik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \xi} \left(\frac{\ln J}{T} - \frac{\ln S}{T} \right) + J \frac{\ln S - \ln J}{t} \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{t}{TJ} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \left(\frac{T-t}{TS} \right)^2 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{T-t}{TS^2} \frac{\partial U}{\partial \xi} + rS \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{T-t}{TS} - rU = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{T-t}{T} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T-t}{T} \frac{\partial U}{\partial \xi} - rU = 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$U|_{t=T} = V|_{t=T} = (J - K)^+ |_{t=T} = \left(e^\xi - K \right)^+, \quad (4.27)$$

dengan :

- U : nilai opsi saham,
- ξ : nilai saham,
- σ : fluktuasi nilai opsi (volatilitas)
- r : tingkat suku bunga bebas risiko,
- t : waktu sampai pada jatuh tempo,
- T : waktu jatuh tempo.

Melalui transformasi Persamaan (4.24) dan (4.25) diperoleh Persamaan (4.27) dan (4.26) dengan $\{\xi \in R, 0 \leq t \leq T\}$.

4.2.3 Pembentukan Persamaan Opsi Asia Rata-Rata Geometrik Tipe Eropa

Persamaan opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa didapatkan dari Persamaan (4.26) dan (4.27) dengan cara ditransformasi. Pandang :

$$W = Ue^{\beta(t)}, \quad (4.28)$$

$$\eta = \xi + \alpha(t), \quad (4.29)$$

$$\tau = \gamma(t). \quad (4.30)$$

Untuk mempermudah perhitungan, perlu dilakukan transformasi variabel terlebih dahulu dengan menggunakan pemisalan (4.28)-(4.30), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} &= \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi}, \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(W e^{-\beta(t)} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi + \alpha(t)), \\ &= \frac{\partial W}{\partial \eta} e^{-\beta(t)}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} e^{-\beta(t)} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi + \alpha(t)) \\ &= \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} e^{-\beta(t)}, \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(W e^{-\beta(t)} \right) \frac{\partial}{\partial t} (\xi + \alpha(t)) + \frac{\partial}{\partial t} \left(W e^{-\beta(t)} \right) (1) \\ &= \frac{\partial W}{\partial \eta} e^{-\beta(t)} \alpha'(t) + \frac{\partial W}{\partial t} e^{-\beta(t)} - \beta'(t) e^{-\beta(t)} W \\ &= \frac{\partial W}{\partial \eta} e^{-\beta(t)} \alpha'(t) + \frac{\partial W}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} e^{-\beta(t)} - \beta'(t) e^{-\beta(t)} W \\ &= \frac{\partial W}{\partial \eta} e^{-\beta(t)} \alpha'(t) + \frac{\partial W}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial t} (\gamma(t)) e^{-\beta(t)} - \beta'(t) e^{-\beta(t)} W \\ &= \frac{\partial W}{\partial \eta} e^{-\beta(t)} \alpha'(t) + \frac{\partial W}{\partial \tau} \gamma'(t) e^{-\beta(t)} - \beta'(t) e^{-\beta(t)} W. \end{aligned}$$

Substitusikan hasil transformasi di atas ke Persamaan (4.26), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W}{\partial \eta} e^{-\beta(t)} \alpha'(t) + \frac{\partial W}{\partial \tau} \gamma'(t) e^{-\beta(t)} - \beta'(t) e^{-\beta(t)} W + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{T-t}{T} \right)^2 \\
 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} e^{-\beta(t)} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) \frac{\partial W}{\partial \eta} e^{-\beta(t)} - r W e^{-\beta(t)} = 0 \\
 \gamma'(t) \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{T-t}{T} \right)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right] \\
 \frac{\partial W}{\partial \eta} - (r + \beta'(t)) W = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

Dengan menggunakan pemisalan berikut :

$$\begin{aligned}
 \alpha'(t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) &= 0, \\
 \beta'(t) + r &= 0, \\
 \gamma'(t) &= - \left(\frac{T-t}{T} \right)^2,
 \end{aligned}$$

dan batasan kondisi

$$\alpha(T) = \beta(T) = \gamma(T) = 0,$$

diperoleh

misal :

$$\begin{aligned}
 m &= T - t \\
 dm &= -dt
 \end{aligned}$$

maka

$$\int y dm = - \int y dt.$$

Berdasarkan pemisalan diatas, sehingga

$$\begin{aligned}
\int \alpha'(t)dt &= - \int \alpha'(t)dm \\
\alpha(t) &= - \int - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{m}{T} \right) dm \\
\alpha(t) &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{T} \right) \\
\alpha(t) &= \frac{1}{2T} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)^2, \\
\int \beta'(t)dt &= - \int \beta'(t)dm \\
\beta(t) &= - \int (-r) dm \\
\beta(t) &= rm \\
\beta(t) &= r(T-t), \\
\int \gamma'(t)dt &= - \int \gamma'(t)dm \\
\gamma(t) &= - \int \left(- \left(\frac{m}{T} \right)^2 \right) dm \\
\gamma(t) &= \frac{1}{T^2} \frac{1}{3} m^3 \\
\gamma(t) &= \frac{1}{3T^2} (T-t)^3.
\end{aligned}$$

Substitusikan pemisalan dan batasan kondisi tersebut ke Persamaan (4.31), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
- \left(\frac{T-t}{T} \right)^2 \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{T-t}{T} \right)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} &= 0, \\
\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} &= 0
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Transformasi Persamaan (4.28)-(4.30) dan batasan kondisi merubah Persamaan Asia rata-rata geometrik menjadi persamaan difusi. Sebelum menentukan solusi dari persamaan difusi, akan ditentukan terlebih dahulu transformasi *payoff* untuk opsi *call*. *Payoff* merupakan fungsi yang dinyatakan oleh beberapa nilai *payoff* karena adanya variansi nilai opsi. Berdasarkan Persamaan (4.28)-(4.30) dan batasan kondisi diatas fungsi *payoff* dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} W &= Ue^{B(t)} = Ue^0 = U, \\ \eta &= \xi + \alpha(t) = \xi + 0 = \xi, \\ \tau &= \gamma(t) = 0. \end{aligned}$$

Substitusikan transformasi diatas ke Persamaan (4.26), sehingga diperoleh *payoff* persamaan difusi sebagai berikut:

$$W(\eta, 0) = (e^\eta - K)^+ = maks(e^\eta - K, 0) \quad (4.33)$$

4.3 Solusi Analitik

Pada bagian ini akan dijelaskan solusi analitik dari persamaan diferensial opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa. Penentuan solusi analitik dari persamaan diferensial opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa didapatkan dari buku yang ditulis oleh Lishang Jiang dengan judul *Mathematical Modelling and Methods of Option Pricing* [4]. Sesuai dengan solusi persamaan difusi pada Persamaan (2.18), sehingga solusi dari Persamaan (4.32) dan nilai *payoff* pada Persamaan (4.33) dapat ditentukan sebagai berikut. Dengan mengambil nilai [22]

$$a = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \left(\frac{T-t}{T}\right) + \alpha'(t) \quad (4.34)$$

$$b = -\left(r + \beta'(t)\right) \quad (4.35)$$

dan misalkan

$$W(\eta, \tau) = U(\eta, \tau) \exp(a\eta + b\tau). \quad (4.36)$$

Diketahui fungsi *payoff*

$$U(\xi, \tau) = \max(\exp(\xi) - K, 0)$$

dan diketahui dari Persamaan (4.29)

$$\xi = \eta - \alpha(t)$$

maka nilai *payoff* dapat ditulis kembali

$$U(\eta, \tau) = \max(\exp(\eta - \alpha(t)) - K, 0)$$

karena nilai *payoff* terjadi saat $T = t$ sehingga

$$U(\eta, \tau) = \max(\exp(\eta - K), 0).$$

Ketika $U = 0$, maka berdasarkan Persamaan (4.34)-(4.36)

$$\begin{aligned} W(\eta, 0) &= 0 \exp \left[\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right) \eta \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

saat $W = \exp(\eta) - K$, maka

$$\begin{aligned} W(\eta, 0) &= \left(\exp(\eta) - K \right) \exp \left[\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right) \eta \right] \\ &= \exp \left[\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) + 1 \right) \eta \right] \\ &\quad - K \left[\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Berdasarkan Persamaan (4.37) dan (4.38), diperoleh kondisi awal solusi Persamaan (4.32) adalah

$$\begin{aligned}
 W(\eta, 0) = & \max \left(\exp \left[\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) + 1 \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. \eta \right] - K \exp \left[\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right) \eta \right], 0 \right).
 \end{aligned}
 \tag{4.39}$$

Telah diketahui bahwa solusi dari Persamaan difusi adalah Persamaan (2.18), dengan mensubstitusikan $x = \eta$, $t = \tau$, $k = \frac{1}{2}\sigma^2$, $s = y$ dan $\phi(y) = (e^y - K)^+$ ke persamaan tersebut, diperoleh

$$\begin{aligned}
 W(\eta, \tau) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^y - K)^+ e^{-\frac{(\eta-y)^2}{2\sigma^2\tau}} dy \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \max(e^y - K, 0) e^{-\frac{(\eta-y)^2}{2\sigma^2\tau}} dy.
 \end{aligned}
 \tag{4.40}$$

Misalkan

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{y - \eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}} \\
 y &= \eta - h\sqrt{\sigma^2\tau} \\
 -\frac{x^2}{2} &= \frac{-(y - \eta)^2}{2\sqrt{2\sigma^2\tau}}
 \end{aligned}$$

maka Persamaan (4.40) menjadi

$$\begin{aligned}
 W(\eta, \tau) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \max \left(\exp(\eta - h\sqrt{\sigma^2\tau}) - K, 0 \right) e^{-\frac{(\eta - y)^2}{2\sigma^2\tau}} dy \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}} \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \alpha'(t) + 1 \right] \exp \left[\eta - h\sqrt{\sigma^2\tau} \right] \exp \left(-\frac{h^2}{2} \right) dh - K \\
 &\quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right] \\
 &\quad \exp \left[\eta - h\sqrt{\sigma^2\tau} \right] \exp \left(-\frac{h^2}{2} \right) dh.
 \end{aligned}$$

Mengingat grafik distribusi normal, maka persamaan diatas dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned}
 W(\eta, \tau) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \alpha'(t) + 1 \right] \exp \left[\eta - h\sqrt{\sigma^2\tau} \right] \exp \left(-\frac{h^2}{2} \right) dx - K \\
 &\quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right] \\
 &\quad \exp \left[\eta - h\sqrt{\sigma^2\tau} \right] \exp \left(-\frac{h^2}{2} \right) dh
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \eta \exp\left[-\frac{h^2}{2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \left(\frac{T-t}{T}\right)\right. \\
&\quad \left. + \alpha'(t) + 1\right] \exp\left[\eta - h\sqrt{\sigma^2\tau}\right] dh - K \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \\
&\quad \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \eta \exp\left[-\frac{h^2}{2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \left(\frac{T-t}{T}\right)\right. \\
&\quad \left. + \alpha'(t)\right] \exp\left[\eta - h\sqrt{\sigma^2\tau}\right] dh.
\end{aligned}$$

Dengan memisalkan

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \eta \exp\left[-\frac{h^2}{2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \left(\frac{T-t}{T}\right) + \right. \\
&\quad \left. \alpha'(t) + 1\right] \exp\left[\eta - h\sqrt{\sigma^2\tau}\right] dh \tag{4.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= K \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \eta \exp\left[-\frac{h^2}{2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \left(\frac{T-t}{T}\right) + \right. \\
&\quad \left. \alpha'(t)\right] \exp\left[\eta - h\sqrt{\sigma^2\tau}\right] dh \tag{4.42}
\end{aligned}$$

sehingga $W(\eta, \tau)$ dapat ditulis kembali

$$W(\eta, \tau) = C_1 - C_2. \tag{4.43}$$

Akan ditentukan nilai C_1 pada Persamaan (4.41)

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp \left[-\frac{h^2}{2} + \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \alpha'(t) + 1 \right) \left(\eta - h\sqrt{\sigma^2\tau} \right) \right] dh \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp \left[-\frac{h^2}{2} + \left(\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \alpha'(t) + 1 \right) \eta \right) + \left(\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) + 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. h\sqrt{\sigma^2\tau} \right) \right] dh \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp \left[\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) + 1 \right) \eta \right] \\
 &\quad \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp \left[-\frac{h^2}{2} + h\sqrt{\sigma^2\tau} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) \right. \\
 &\quad \left. + h\sqrt{\sigma^2\tau} \alpha'(t) + h\sqrt{\sigma^2\tau} \right] dh.
 \end{aligned}$$

C_1 akan dibentuk menjadi persamaan kuadrat, sehingga

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp \left[\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) + 1 \right) \eta \right] \\
 &\quad \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(h^2 - 2h\sqrt{\sigma^2\tau} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left(\frac{T-t}{T} \right) + 2h\sqrt{\sigma^2\tau} \alpha'(t) + 2h\sqrt{\sigma^2\tau} \right) \right] dh
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp \left[\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) + 1 \right) \eta \right] \\
&\quad \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(h^2 - 2h\sqrt{\sigma^2\tau} \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) + 1 \right) \right) \right] dh \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp \left[\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) + 1 \right) \eta \right] \\
&\quad \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left[h^2 - 2h\sqrt{\sigma^2\tau} \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) + 1 \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \alpha'(t) + 1 \right) + \left(\sqrt{\sigma^2\tau} \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) + 1 \right) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \left(\sqrt{\sigma^2\tau} \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) + 1 \right) \right)^2 \right] \right] dh \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp \left[\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) + 1 \right) \eta \right] \\
&\quad \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(h - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2\tau} \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) + 1 \right) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\sigma^2\tau} \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) + 1 \right) \right)^2 \right] dh. \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Persamaan C_1 akan dijadikan distribusi normal, sehingga dimisalkan $z = h - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2\tau} \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) + 1 \right)$ dan diketahui bahwa $\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) = 0$, sehingga

Persamaan (4.44) dapat ditulis kembali

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2\tau}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z)^2\right) dz \\
 &= \frac{\exp(\eta)}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2\tau}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(z)^2\right) dz \\
 &= \frac{\exp(\eta)}{\sigma\sqrt{\tau}} N(d1).
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Diperoleh

$$d1 = -\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2\tau} \tag{4.46}$$

$$N(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\eta}^{\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2\tau}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z)^2\right) dz. \tag{4.47}$$

Persamaan (4.46) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned}
 d1 &= \frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2\tau} \\
 &= \frac{\xi + \alpha(t)}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2\tau} \\
 &= \frac{\frac{1}{T}(\ln J^t + \ln S^{T-t}) + \frac{1}{2T}(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)^2}{\sigma \frac{1}{T} \frac{1}{\sqrt{3}}(T-t)\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau} \\
 &= \frac{\frac{1}{T}(\ln J^t + \ln S^{T-t}) + \left[(r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T-t}{2T}\right](T-t)}{\left[\frac{\sigma(T-t)}{\sqrt{3}T}\right]\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2} \\
 &\quad \left[\frac{\sigma(T-t)}{\sqrt{3}T}\right]\sqrt{T-t},
 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} r^* &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{T-t}{2T} \\ \sigma^* &= \frac{\sigma(T-t)}{\sqrt{3}T}. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} d_1^* &= \frac{\frac{1}{T}(\ln J^t + \ln S^{T-t}) + r^*(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^{*2}(T-t)}{\sigma^*\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{\frac{1}{T}(\ln J^t + \ln S^{T-t}) + (r^* + \frac{1}{2}\sigma^{*2})(T-t)}{\sigma^*\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\exp(\eta)}{\sigma\sqrt{\tau}} N(d_1^*) \\ &= \frac{1}{\sigma \frac{1}{T} \frac{1}{\sqrt{3}} (T-t) \sqrt{T-t}} \exp\left[\frac{\xi + \alpha(t)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right] N(d_1^*) \\ &= \frac{1}{\left[\frac{\sigma(T-t)}{\sqrt{3}T}\right] \sqrt{T-t}} \exp\left[\frac{1}{T}(\ln J^t + \ln S^{T-t}) + \frac{1}{2T}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)^2\right] N(d_1^*) \\ &= \frac{1}{\sigma^*\sqrt{T-t}} \exp\left[\frac{1}{T}(\ln J^t + \ln S^{T-t}) + \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{T-t}{2T}\right] (T-t)\right] N(d_1^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma^* \sqrt{T-t}} \exp \left[\frac{1}{T} (\ln J^t + \ln S^{T-t}) + r^*(T-t) \right] N(d_1^*) \\
&= \frac{1}{\sigma^* \sqrt{T-t}} \exp \left[(\ln J^{\frac{t}{T}} + \ln S^{\frac{T-t}{T}}) \right] \exp \left[r^*(T-t) \right] N(d_1^*) \\
&= \frac{1}{\sigma^* \sqrt{T-t}} \exp \left[\ln J^{\frac{t}{T}} \right] \exp \left[\ln S^{\frac{T-t}{T}} \right] \exp \left[r^*(T-t) \right] N(d_1^*) \\
&= \frac{1}{\sigma^* \sqrt{T-t}} \left[\ln J^{\frac{t}{T}} \ln S^{\frac{T-t}{T}} \right] \exp \left[r^*(T-t) \right] N(d_1^*) \\
&= \frac{1}{\sigma^* \sqrt{T-t}} \left[\ln J^t \ln S^{T-t} \right] \frac{1}{T} \exp \left[r^*(T-t) \right] N(d_1^*). \quad (4.48)
\end{aligned}$$

Akan ditentukan nilai C_2 pada Persamaan (4.42)

$$\begin{aligned}
C_2 &= K \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp \left[-\frac{h^2}{2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \right. \\
&\quad \left. \alpha'(t) \right] \exp \left[\eta - h\sqrt{\sigma^2\tau} \right] dh \\
&= K \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp \left[-\frac{h^2}{2} + \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \alpha'(t) \right) \eta \right] + \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right) \\
&\quad \left. h\sqrt{\sigma^2\tau} \right] dh.
\end{aligned}$$

C_2 akan dibentuk menjadi persamaan kuadrat, sehingga

$$C_2 = K \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi\tau}} \exp \left[\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right) \eta \right]$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp \left[-\frac{h^2}{2} + h\sqrt{\sigma^2\tau} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) \right. \\
& \quad \left. + h\sqrt{\sigma^2\tau} \alpha'(t) \right] dh \\
&= K \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp \left[\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right) \eta \right] \\
& \quad \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(h^2 - 2h\sqrt{\sigma^2\tau} \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right) \right) \right] dh, \\
&= K \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp \left[\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right) \eta \right] \\
& \quad \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left[h^2 - 2h\sqrt{\sigma^2\tau} \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \alpha'(t) \right) + \left(\sqrt{\sigma^2\tau} \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right) \right)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(\sqrt{\sigma^2\tau} \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right) \right)^2 \right] \right] dh \\
&= K \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp \left[\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right) \eta \right] \\
& \quad \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(h - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2\tau} \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right) \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\sigma^2\tau} \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right) \right)^2 \right] dh. \tag{4.49}
\end{aligned}$$

Persamaan C_2 akan dijadikan distribusi normal, sehingga dimisalkan $z = h - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2\tau} \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right)$ dan diketahui bahwa $\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) = 0$, sehingga Persamaan (4.49) dapat ditulis kembali

$$\begin{aligned}
 C_2 &= K \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(z)^2\right) dz \\
 &= K \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(z)^2\right) dz \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} N(d2),
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

dengan

$$d2 = -\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}, \tag{4.51}$$

$$N(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\eta}^{\frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z)^2\right) dz. \tag{4.52}$$

Persamaan (4.51) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned}
 d2 &= \frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2\tau}} \\
 &= \frac{\xi + \alpha(t)}{\sigma\sqrt{\tau}} \\
 &= \frac{\frac{1}{T}(\ln J^t + \ln S^{T-t}) + \frac{1}{2T}(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)^2}{\sigma \frac{1}{T} \frac{1}{\sqrt{3}}(T-t)\sqrt{T-t}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{T}(\ln J^t + \ln S^{T-t}) + \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T-t}{2T} \right] (T-t)}{\left[\frac{\sigma(T-t)}{\sqrt{3}T} \right] \sqrt{T-t}}.$$

Sama seperti langkah menentukan d_1^* , dimisalkan

$$\begin{aligned} r^* &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T-t}{2T}, \\ \sigma^* &= \frac{\sigma(T-t)}{\sqrt{3}T}. \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} d_2^* &= \frac{\frac{1}{T}(\ln J^t + \ln S^{T-t}) + r^*(T-t)}{\sigma^* \sqrt{T-t}} \\ &= \frac{\frac{1}{T}(\ln J^t + \ln S^{T-t}) + r^*(T-t)}{\sigma^* \sqrt{T-t}} + \frac{1}{2} \sigma^* \sqrt{T-t} - \frac{1}{2} \sigma^* \\ &= \frac{\frac{1}{T}(\ln J^t + \ln S^{T-t}) + \left(r^* + \frac{1}{2} \sigma^{*2} \right) (T-t)}{\sigma^* \sqrt{T-t}} - \frac{1}{2} \sigma^* \sqrt{T-t} \\ &= N(d_1^*) - \frac{1}{2} \sigma^* \sqrt{T-t}, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 C_2 &= K \frac{1}{\sigma \sqrt{\tau}} N(d_2^*) \\
 &= K \frac{1}{\sigma \frac{1}{T} \frac{1}{\sqrt{3}} (T-t) \sqrt{T-t}} N(d_2^*) \\
 &= K \frac{1}{\left[\frac{\sigma(T-t)}{\sqrt{3}T} \right] \sqrt{T-t}} N(d_2^*) \\
 &= K \frac{1}{\sigma^* \sqrt{T-t}} N(d_2^*). \tag{4.53}
 \end{aligned}$$

Substitusikan Persamaan (4.48) dan (4.53) ke Persamaan (4.43), diperoleh

$$\begin{aligned}
 W(\eta, \tau) &= \frac{1}{\sigma^* \sqrt{T-t}} \left[\ln J^t \ln S^{T-t} \right] \frac{1}{T} \exp \left[r^*(T-t) \right] N(d_1^*) \\
 &\quad - K \frac{1}{\sigma^* \sqrt{T-t}} N(d_2^*). \tag{4.54}
 \end{aligned}$$

Untuk memvalidasi solusi yang diperoleh pada Persamaan (4.54), maka Persamaan tersebut akan diturunkan berdasarkan Persamaan (4.32)

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0.$$

Hasil turunan Persamaan (4.54) menghasilkan 0 sama seperti Persamaan (4.32), sehingga solusi pada Persamaan (4.54) dikatakan valid. Selanjutnya solusi diperoleh pada Persamaan

(4.54) dikembalikan ke bentuk semula.

$$\begin{aligned}
 V(S, J, t) &= W \exp(-\beta(t)) \\
 &= \left[\frac{1}{\sigma^* \sqrt{T-t}} \left[\ln J^t \ln S^{T-t} \right] \frac{1}{T} \exp \left[r^*(T-t) \right] N(d_1^*) \right. \\
 &\quad \left. - K \frac{1}{\sigma^* \sqrt{T-t}} N(d_2^*) \right] \exp(-r(T-t)). \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

Hasil dari solusi analitik pada Persamaan (4.55) dan parameter-parameternya akan disimulasikan menggunakan *software* MATLAB.

4.4 Solusi Analitik Aproksimasi

Pada bagian solusi analitik aproksimasi dibahas mengenai solusi persamaan diferensial opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa menggunakan metode *Perturbation*. Penentuan solusi analitik aproksimasi dari persamaan diferensial opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa terinspirasi dari jurnal yang ditulis oleh Jin E. Zhang tahun 2002 dengan judul *Pricing Continuously Sampled Asian Options With Perturbation Method* [5]. Persamaan difusi yang telah didapatkan pada Persamaan (4.32) dan nilai *payoff* pada Persamaan (4.33) akan dicari solusinya dengan metode *perturbation*, sebagai berikut:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0 \quad (4.56)$$

$$W(\eta, 0) = (e^\eta - K)^+ = \max(e^\eta - K, 0). \quad (4.57)$$

Misalkan $p \rightarrow 1$ adalah parameter *perturbation* dan diketahui bahwa solusi dari W adalah

$$\begin{aligned}
 W &= \sum_{i=0}^{\infty} p^i W_i \\
 &= p^0 W_0 + p^1 W_1 + p^2 W_2 + p^3 W_3 + \dots \quad (4.58)
 \end{aligned}$$

$$W_i(\eta, 0) = 0, \quad (4.59)$$

untuk $i = 1, 2, \dots$ maka $p \rightarrow 1$. Karena Persamaan (4.56) memenuhi kriteria *Singularly Perturbed*, maka dapat ditulis kembali

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\partial W_0}{\partial \tau} = p \left[\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} - \frac{\partial W_0}{\partial \tau} \right]. \quad (4.60)$$

Substitusikan Persamaan (4.58) ke (4.60), diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left[p^0 W_0 + p^1 W_1 + p^2 W_2 + p^3 W_3 + \dots \right] - \frac{\partial W_0}{\partial \tau} = \\ & p \left[\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[p^0 W_0 + p^1 W_1 + p^2 W_2 + p^3 W_3 + \dots \right] - \frac{\partial W_0}{\partial \tau} \right], \\ & \frac{\partial W_0}{\partial \tau} + p^1 \frac{\partial W_1}{\partial \tau} + p^2 \frac{\partial W_2}{\partial \tau} + p^3 \frac{\partial W_3}{\partial \tau} + \dots - \frac{\partial W_0}{\partial \tau} = \\ & p \left[\frac{\sigma^2}{2} \left[\frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta^2} + p^1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2} + p^2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial \eta^2} + p^3 \frac{\partial^2 W_3}{\partial \eta^2} + \dots \right] - \frac{\partial W_0}{\partial \tau} \right]. \end{aligned}$$

Dengan mengelompokkan suku yang mempunyai orde sama, diperoleh

$$\begin{aligned} p^0 & : \quad \frac{\partial W_0}{\partial \tau} - \frac{\partial W_0}{\partial \tau} = 0 \\ p^1 & : \quad \frac{\partial W_1}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta^2} - \frac{\partial W_0}{\partial \tau} \\ p^2 & : \quad \frac{\partial W_2}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2} \\ p^3 & : \quad \frac{\partial W_2}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2} \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ p^n & : \quad \frac{\partial W_n}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W_{n-1}}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Diketahui bahwa nilai *payoff* diberikan oleh

$$W_0(\eta, 0) = \max(\exp(\eta) - K, 0), \quad (4.61)$$

sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_0}{\partial \eta} &= \max(\exp(\eta), 0) \\ \frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta^2} &= \max(\exp(\eta), 0). \end{aligned}$$

Untuk mencari $W_1(\eta, \tau)$ maka suatu persamaan diferensial perlu diintegalkan, sehingga

$$\begin{aligned} W_1(\eta, \tau) &= \int \frac{\partial W_1}{\partial \tau} d\tau \\ &= \int \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta^2} - \frac{\partial W_0}{\partial \tau} \right) d\tau \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta^2} \tau - W_0 + C_1. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Karena diketahui $W_1(\eta, 0) = 0$ maka $p \rightarrow 1$, diperoleh

$$\begin{aligned} W_1(\eta, 0) &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta^2}(0) - W_0 + C_1 \\ 0 &= -W_0 + C_1 \\ W_0 &= C_1. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Substitusikan Persamaan (4.63) ke (4.62), didapatkan

$$\begin{aligned} W_1(\eta, \tau) &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta^2} \tau - W_0 + W_0 \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta^2} \tau \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \tau \max(\exp(\eta), 0). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Solusi untuk $W_2(\eta, \tau)$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 W_2(\eta, \tau) &= \int \frac{\partial W_2}{\partial \tau} d\tau \\
 &= \int \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2} d\tau \\
 &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2} \tau + C_2.
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Disebabkan oleh $W_2(\eta, 0) = 0$ maka $p \rightarrow 1$, diperoleh

$$\begin{aligned}
 W_2(\eta, 0) &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2}(0) + C_2 \\
 0 &= C_2.
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

Substitusikan Persamaan (4.66) ke (4.65), didapatkan

$$W_2(\eta, \tau) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2} \tau. \tag{4.67}$$

Diketahui *payoff*

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W_1}{\partial \eta} &= \frac{\sigma^2}{2} \tau \max(\exp(\eta), 0) \\
 \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2} &= \frac{\sigma^2}{2} \tau \max(\exp(\eta), 0).
 \end{aligned}$$

Sehingga $W_2(\eta, \tau)$ pada Persamaan (4.66) dapat ditulis kembali

$$\begin{aligned}
 W_2(\eta, \tau) &= \frac{\sigma^2}{2} \tau \frac{\sigma^2}{2} \tau \max(\exp(\eta), 0) \\
 &= \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \tau^2 \max(\exp(\eta), 0).
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Solusi untuk $W_3(\eta, \tau)$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 W_3(\eta, \tau) &= \int \frac{\partial W_3}{\partial \tau} d\tau \\
 &= \int \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W_2}{\partial \eta^2} d\tau \\
 &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W_2}{\partial \eta^2} \tau + C_3.
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Disebabkan oleh $W_3(\eta, 0) = 0$ maka $p \rightarrow 1$, diperoleh

$$\begin{aligned}
 W_3(\eta, 0) &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W_2}{\partial \eta^2}(0) + C_2 \\
 0 &= C_3.
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

Substitusikan Persamaan (4.70) ke (4.69), didapatkan

$$W_3(\eta, \tau) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W_2}{\partial \eta^2} \tau. \tag{4.71}$$

Diketahui *payoff*

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W_2}{\partial \xi} &= \left(\frac{\sigma^2}{2}\tau\right)^2 \max(\exp(\eta), 0) \\
 \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2} &= \left(\frac{\sigma^2}{2}\tau\right)^2 \max(\exp(\eta), 0).
 \end{aligned}$$

Sehingga $W_3(\eta, \tau)$ pada Persamaan (4.71) dapat ditulis kembali

$$\begin{aligned}
 W_3(\eta, \tau) &= \frac{\sigma^2}{2} \tau^2 \max(\exp(\eta), 0) \\
 &= \left(\frac{\sigma^2}{2}\tau\right)^3 \max(\exp(\eta), 0).
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

Berdasarkan Persamaan (4.64), (4.68), dan (4.72) untuk $n \geq 1$, diperoleh

$$W_n(\eta, \tau) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sigma^2}{2} \tau \right)^n \right) \max(\exp(\eta), 0). \quad (4.73)$$

Dengan demikian didapatkan solusi W dari penjumlahan Persamaan (4.61) dan (4.73) sebagai berikut

$$\begin{aligned} W(\eta, \tau) &= W_0(\eta, 0) + W_n(\eta, \tau) \\ &= \max(\exp(\eta) - K, 0) + \left(\sum_{n=1}^n \left(\frac{\sigma^2}{2} \tau \right)^n \right) \max(\exp(\eta), 0) \\ &= \max \left(\exp \left(\left(\frac{t \ln J + (T-t) \ln S}{T} \right) + \frac{1}{2T} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left((T-t)^2 \right) - K, 0 \right) + \left(\sum_{n=1}^n \left(\frac{\sigma^2}{2} \tau \right)^n \right) \max \left(\exp \left(\xi + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \alpha(t), 0 \right) \right) \left(\exp \left(-r(T-T) \right) \right) \\ &= \max \left(\exp \left(\left(\frac{t \ln J + (T-t) \ln S}{T} \right) + \frac{1}{2T} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left((T-t)^2 \right) - K, 0 \right) + \left(\sum_{n=1}^n \left(\frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1}{3T^2} (T-t)^3 \right) \right)^n \right) \\ &\quad \max \left(\exp \left(\frac{t \ln J + (T-t) \ln S}{T} + \frac{1}{2T} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (T-t)^2, 0 \right) \right). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Untuk memvalidasi solusi yang diperoleh pada Persamaan (4.74), maka Persamaan tersebut akan diturunkan berdasarkan Persamaan (4.32)

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0.$$

Hasil turunan Persamaan (4.74) menghasilkan 0 sama seperti Persamaan (4.32), sehingga solusi pada Persamaan (4.74) dikatakan valid. Selanjutnya solusi diperoleh pada Persamaan (4.74) dikembalikan ke bentuk semula. Berdasarkan Persamaan (4.28)

$$\begin{aligned} W &= U \exp(\beta(t)) \\ U &= \frac{W}{\exp(\beta(t))} \end{aligned}$$

dan (4.25)

$$\begin{aligned} V &= U \\ &= W \exp(-\beta(t)). \end{aligned}$$

Substitusikan Persamaan (4.25), (4.25), (4.28), dan (4.29) ke Persamaan (4.74), diperoleh

$$\begin{aligned} V(S, J, t) &= \max \left(\exp \left(\frac{t \ln J + (T-t) \ln S}{T} \right) + \frac{1}{2T} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)^2 \right. \\ &\quad \left. - K, 0 \right) + \left(\sum_{n=1}^n \left(\frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1}{3T^2} (T-t)^3 \right) \right)^n \right) \max \\ &\quad \left(\exp \left(\frac{t \ln J + (T-t) \ln S}{T} + \frac{1}{2T} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)^2, 0 \right) \right) \\ &\quad \left(\exp \left(-r (T-t) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.75)$$

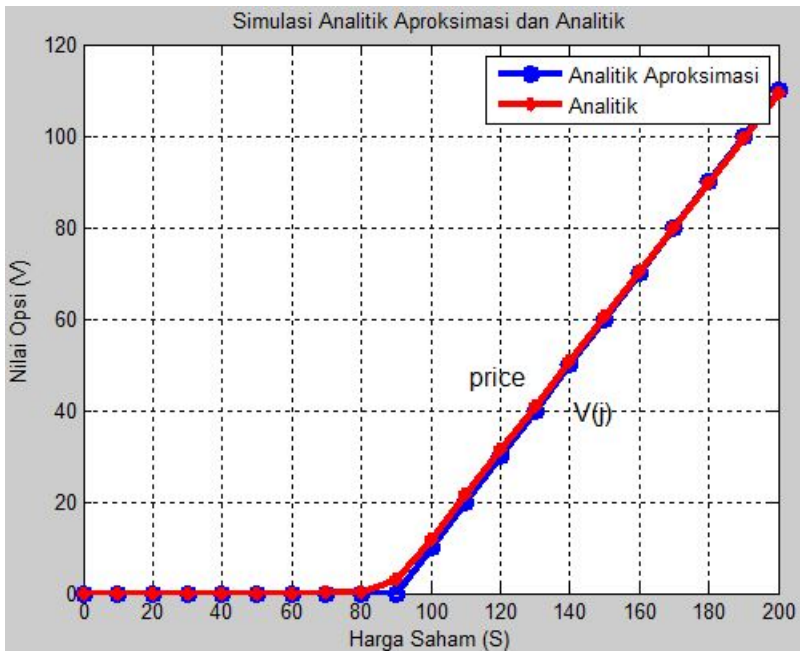
Hasil yang diperoleh pada Persamaan (4.75) dan parameter-parameternya akan disimulasikan menggunakan *software* MATLAB.

4.5 Simulasi dan Analisis Hasil Simulasi

4.5.1 Perbandingan Simulasi Analitik dan Analitik Aproksimasi

Gambar (4.1) menunjukkan selisih simulasi analitik aproksimasi dan analitik dengan inisialisasi nilai yang yang

sama. Inisialisasi yang digunakan, yaitu S_0 (nilai saham) sebesar 100, K (*Strike Price*) sebesar 90, r (tingkat suku bunga bebas risiko) sebesar 0.05, T (waktu jatuh tempo) sebesar 1 tahun, t (waktu sampai pada jatuh tempo) sebesar 0.25, dan volatilitas sebesar 0.1. Gambar (4.1) merupakan hasil simulasi dengan *looping* S sebanyak 20 kali. Sehingga dapat disimpulkan bahwa selisih simulasi analitik aproksimasi dan analitik tidak memiliki perbedaan yang signifikan. Selisih nilai opsi antara simulasi analitik aproksimasi dan analitik dapat dilihat pada Tabel 1.



Gambar 4.1: Selisih Simulasi Analitik Aproksimasi dan Analitik

Tabel 4.1: Perbandingan Analitik Aproksimasi dan Analitik

Nilai Opsi Analitik Aproksimasi	Nilai Opsi Analitik	Selisih
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0.0409	0.0409
0	2.9074	2.9074
9.9315	11.7984	1.8669
19.9246	21.5330	1.6084
29.9178	31.2734	1.3556
39.9109	41.0137	1.1028
49.9040	50.7540	0.8500
59.8972	60.4944	0.5972
69.8903	70.2347	0.3444
79.8835	79.9751	0.0916
89.8766	89.7154	0.1612
99.8698	99.4557	0.4140
109.8629	109.1961	0.6669

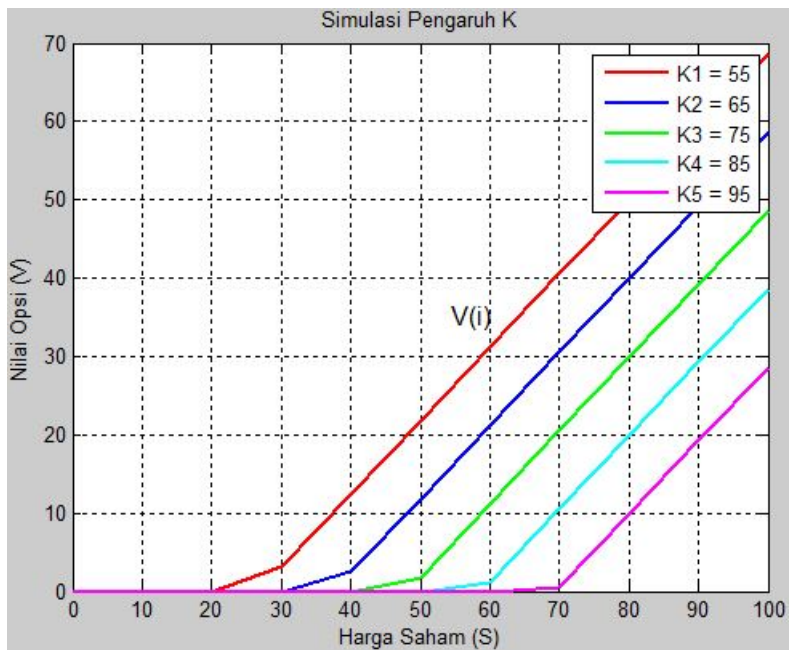
4.5.2 Simulasi Solusi Analitik Aproksimasi

Menurut Abdul Halim dalam bukunya yang berjudul Analisis Investasi mengatakan bahwa ada 4 faktor yang mempengaruhi nilai opsi, yaitu *strike price*, jangka waktu jatuh tempo, volatilitas, dan tingkat suku bunga bebas resiko [16]. Oleh karena itu, pada bagian simulasi analitik aproksimasi ini akan menampilkan 4 faktor tersebut pada

persamaan (4.75). Simulasi dari 4 faktor tersebut adalah sebagai berikut:

1. Simulasi Pengaruh *Strike Price*

Pada Gambar (4.2) akan menampilkan pengaruh nilai *Strike Price* terhadap nilai opsi *call* Asia. Dengan menggunakan inisialisasi S_0 (nilai saham) sebesar 100, σ (volatilitas) sebesar 0.7, r (tingkat suku bunga bebas risiko) sebesar 0.05, T (waktu jatuh tempo) sebesar 1 tahun, dan t (waktu sampai pada jatuh tempo) 0.25. Semakin besar nilai *Strike Price* menghasilkan nilai *call* opsi Asia semakin kecil. Terlihat bahwa dengan nilai K

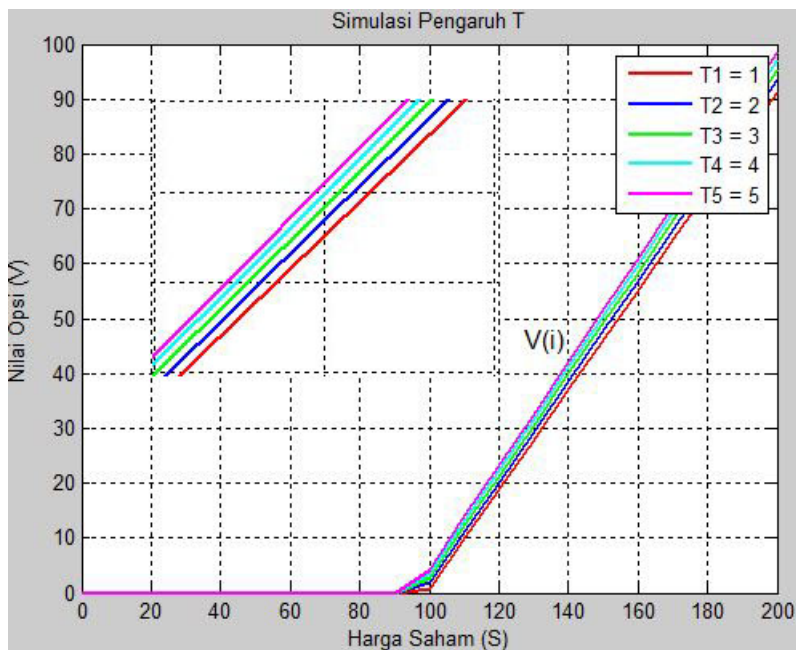


Gambar 4.2: Simulasi Pengaruh Nilai *Strike Price*

terbesar, 95, menghasilkan nilai *call* opsi Asia terkecil dengan bertambahnya nilai saham. Begitupun sebaliknya, semakin kecil nilai *strike price*, 55, menghasilkan nilai opsi *call* Asia terbesar. Sehingga, dapat diambil kesimpulan bahwa nilai *call* opsi Asia berbanding terbalik dengan nilai *strike price*.

2. Simulasi Pengaruh *Maturity Date*

Berdasarkan Persamaan (4.75) dapat diperoleh grafik pada Gambar (4.3) yang menunjukkan pengaruh nilai *maturity date* terhadap nilai opsi *call* Asia. Dengan menggunakan



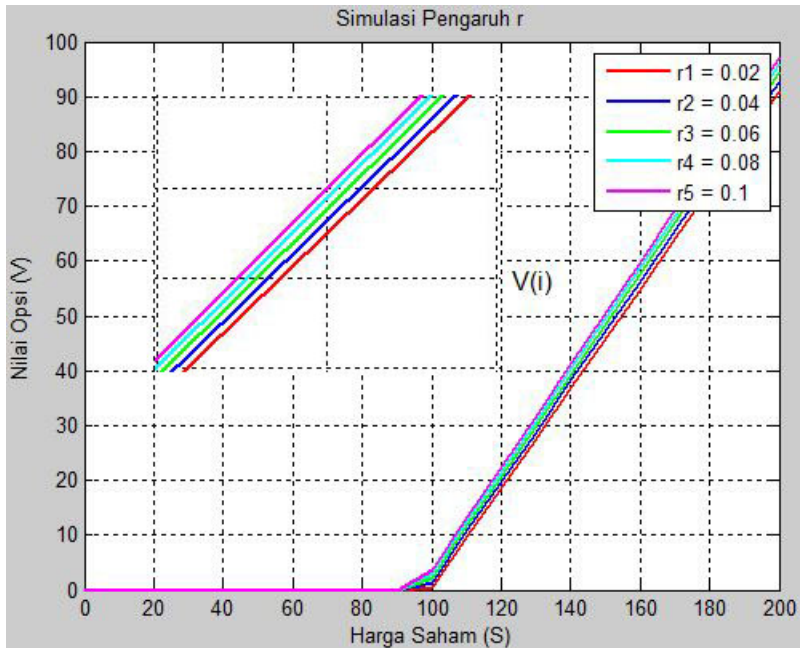
Gambar 4.3: Simulasi Pengaruh Nilai T

inisialisasi yang sama, namun T berbeda-beda, dengan

T_1, T_2, T_3, T_4 , dan T_5 (waktu jatuh tempo) masing-masing sebesar 1, 2, 3, 4, 5 tahun. Diperoleh kesimpulan bahwa semakin besar nilai T maka nilai opsi Asia juga semakin besar. Terlihat pada Gambar (4.3) menghasilkan *plot* dengan nilai terbesar, $T_5 = 5$ tahun pada fungsi berwarna *magenta*, menghasilkan nilai opsi terbesar pula.

3. Simulasi Pengaruh *risk free interest rate*

Pada Gambar (4.4) akan menampilkan pengaruh nilai *risk free interest rate* (tingkat suku bunga bebas risiko) terhadap nilai opsi *call* Asia. Dengan menggunakan

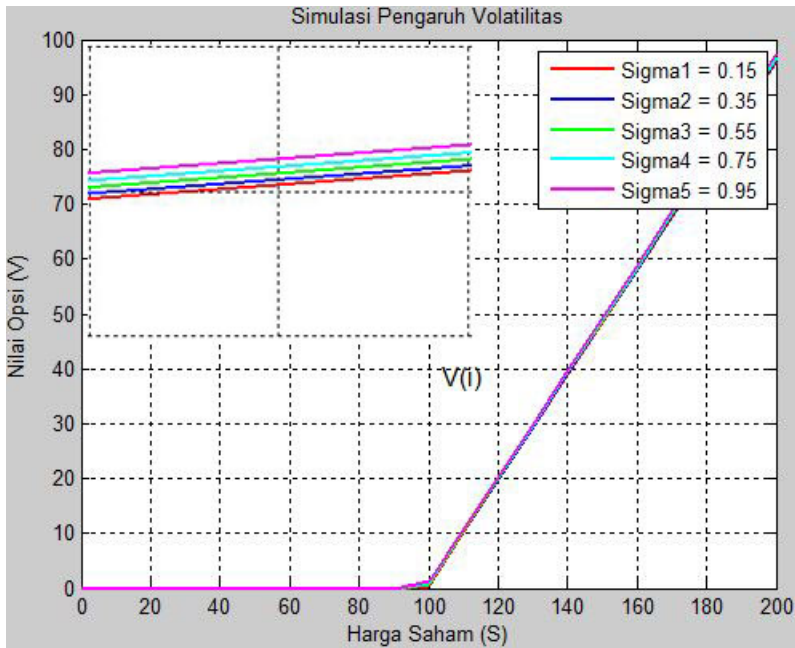


Gambar 4.4: Simulasi Pengaruh Nilai *Risk Free Interest Rate*

inisialisasi yang sama, namun nilai *risk free interest rate* berbeda-beda, dengan $r_1 = 0.15$, $r_2 = 0.35$, $r_3 = 0.55$, $r_4 = 0.75$, dan $r_5 = 0.95$. Didapatkan kesimpulan bahwa semakin besar nilai r menyebabkan nilai opsi *call* Asia semakin besar. Hal ini sesuai dengan *trend* nilai opsi Asia, dimana semakin besar nilai r , maka nilai opsi Asia semakin besar pula.

4. Simulasi Pengaruh *Volatilitas*

Pada Gambar (4.5) akan menampilkan pengaruh nilai *Strike Price* terhadap nilai opsi *call* Asia. Dengan



Gambar 4.5: Simulasi Pengaruh Nilai Volatilitas

menggunakan inisialisasi σ (volatilitas) berturut-turut

sebesar 0.15, 0.35, 0.55, 0.75, dan 0.95. Diperoleh kesimpulan bahwa semakin besar nilai *volatilitas* menghasilkan nilai *call* opsi Asia juga semakin besar. Terlihat bahwa dengan nilai σ terbesar, 0.95, menghasilkan nilai *call* opsi Asia terbesar dengan bertambahnya nilai saham. Begitupun sebaliknya, semakin kecil nilai *volatilitas*, 0.55, menghasilkan nilai opsi *call* Asia terkecil.

Berdasarkan pengaruh nilai parameter K , σ , T , dan r , diperoleh kesimpulan bahwa K memiliki pengaruh yang berbanding terbalik dengan nilai opsi *call* Asia. Dimana semakin besar nilai K maka nilai opsi *call* Asia semakin kecil, begitupun sebaliknya. Sedangkan pengaruh nilai parameter σ , T , dan r memiliki pengaruh yang berbanding lurus dengan nilai opsi *call* Asia. Dimana semakin besar nilai σ , T , dan r maka nilai opsi *call* Asia juga semakin besar.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah dibahas pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa yang diperoleh, yaitu

$$\gamma'(t) \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{T-t}{T} \right)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{T-t}{T} \right) + \alpha'(t) \right] \frac{\partial W}{\partial \eta} - \left(r + \beta'(t) \right) W = 0.$$

Model tersebut diperoleh dari pembentukan *portofolio* pada nilai opsi Asia dengan menerapkan formula Itô dan prinsip *free of arbitrage*.

2. Formula yang diperoleh dari penelitian ini yaitu pada penentuan harga opsi call Asia aritmatika dengan menggunakan metode *perturbation* yaitu,

$$V(S, J, t) = \left(\max(e^\eta - K, 0) + \left(\sum_{n=1}^n \left(\frac{\sigma^2}{2} \tau \right)^n \right) \right) e^{\beta(t)}$$

dengan

$$\eta = \xi + \alpha(t),$$

$$\xi = \frac{t \ln J + (T - t) \ln S}{T},$$

$$J = e^{\frac{1}{t} \int_0^t \ln S_\tau d\tau},$$

$$\tau = \gamma(t).$$

Formula tersebut didapatkan melalui tranformasi model opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa menuju persamaan difusi yang selanjutnya diberikan parameter *perturbation* sehingga didapatkan suatu solusi.

3. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pengaruh parameter *strike price* (K), *maturity date* (T), *risk free interest rate* (r), dan volatilitas (σ) pada model opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa dengan metode *Perturbation* sesuai dengan *trend* nilai opsi Asia.

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini hanya dibahas mengenai *call* opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa, untuk penelitian selanjutnya, dapat dikembangkan model untuk *put* opsi Asia rata-rata geometrik tipe Eropa dan aplikasinya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Holmes, M.H. (2013). **Introduction to Perturbation Methods**, 2nd Edition. New York: Springer Science+Business Media.
- [2] Sousa, R., dkk. (2017). **Barrier option pricing under the 2-hypergeometric stochastic volatility model**. Computational and Applied Mathematics Vol. 328, Hal. 197-213.
- [3] Knessl, C., Xu, M. (2011). **On a free boundary problem for an American put option under the CEV process**. Applied Mathematics Letters Vol. 24, Hal. 1191-1198.
- [4] Hanafi, Lukman, dkk. (2010). **Penyelesaian Numerik untuk Menentukan Nilai Optimal Pada American Option dengan Metode Beda Hingga Fully Implisit dan Crank Nicolson**. J. Math. and Its Appl. Vol 7, No. 2, Hal. 1.
- [5] Zhang, J.E. (2003). **Pricing Continuously Sampled Asian Options With Perturbtion Method**. The Journal of Futures Markets, Vol. 23, No. 6, Hal. 535-560.
- [6] Pun, C.S., Wong, H.Y. (2013). **CEV asymptotics of American options**. Journal of Mathematical Analysis and Applications Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 403, Hal. 451-463.

- [7] Zhu, S.P., Chen, W.T. (2011). **Pricing perpetual American options under a stochastic volatility model with fast mean reversion.** Applied Mathematics Letters Vol. 24, Hal. 1663-1669.
- [8] Sataphaty, G. (2012). **Asymptotic Expansions Methods for Singularly Perturbation Problem.** Thesis. National Institute of Technology Rourkela, India.
- [9] Rudiger, S. (2002). **Tools for Computational Finance.** Koln: Springer.
- [10] Bodie, K.M. (2005). **Investment International Sixth Edition.** New York: Mc. Graw-Hill.
- [11] Seydel, U.R. (2006). **Tools for Computational Finance.** Koln : Germany.
- [12] Higham, Desmond J. (2004). **An Introduction To Financial Option Valuation.** UK: Cambridge University Press.
- [13] Hull, J. C. (2009). **Option Futures and Other Derivatives,** 8th Edition. New Jersey: Prentice-Hall.
- [14] Lo, MS. (2003). **Generalized autoregressive conditional heterscedasticity time series model [tesis].** Burnaby (CA): Simon Fraser University.
- [15] Irma Liyonita, Selvi. (2015). **Aplikasi Metode Crank-Nicolson untuk Menentukan Harga *European Call Option* Pada Model Heston.** Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Indonesia.

- [16] Halim, Abdul. (2005). **Analisis Investasi**. Jakarta : Salemba Empat.
- [17] Affanti, I.R. (2012). **Prediksi Harga Saham Menggunakan Geometric Brownian Motion**. Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Indonesia.
- [18] Tyarani, Myra. (2003). **Gerak Brown Modifikasi-Modifikasi serta Aplikasinya pada Penurunan Model Black-Scholes**. Matematika, Universitas Indonesia, Indonesia.
- [19] Straus, Walter A. **Partial Differential Equations: An Introduction**. USA: John Wiley and Sons.
- [20] Jiang, L. (2005). **Mathematical Modelling and Methods of Option Pricing**. China: Higher Education Press.
- [21] Rokhmati, Endah M.P. , dkk. (2007). **Perbandingan Model Black Scholes dan Brennan Schwartz untuk Menentyukan Harga American Option**. J. Math. and Its Appl. Vol 4, No. 1, Hal. 4.
- [22] Rokhmati, Endah M.P. and Didik, Sentot Surjanto. (2017). **Performance of Gahver-Stehfest Numerical Laplace Inversion Method on Option pricing Formulas**. International Journal of Computing Science and Applied Mathematics, Vol. 3, No. 2, Hal. 3.

LAMPIRAN

LAMPIRAN A

Source Code Perbandingan Simulasi Analitik Aproksimasi dan Analitik

```

1  clc;
2  clear;
3  s0 = 100; % nilai opsi saat t=0
4  K = 90; % nilai opsi saat T
5  r = 0.05; % tingkat suku bunga bebas resiko
6  sd = 0.1; % fluktuasi nilai opsi
7  Te = 1; % waktu jatuh tempo
8  t = 0.25; % waktu sampai jatuh tempo
9  tau= (1/3*(Te)^2)*(Te-t)^3;
10 p=2;
11 j=1
12 for i = 0:0.1:p
13     s(j) = i * s0;
14     J(j) = s(j);
15     W0(j)=[exp((1/Te)*(t*log(J(j))+log((s(j))^(Te-t))))
16             -K]
17     h=0;
18     for ii=1:30
19         g = ((-1)^ii)*(((sd)^2)*tau/2)^ii);
20         h=h+g;
21     end
22     Wn(j)=[exp((1/Te)*(t*log(J(j))+log((s(j))^(Te-t))))
23             +(1/(2*Te))*(r-((sd)^2)/2)*((Te-t)^2))];
24     V(j)=W0(j)+(h*Wn(j)*exp(-r*(Te-t)))
25     double(V)
26     V(j)=max(V(j),0)
27     j=j+1;
28 end
29 N = 0:0.1:p;
30 plot(s,V, '-bo', 'linewidth', 3);
31 gtext('V(j)', 'FontSize', 12);
32 xlabel('Harga Saham (S)', 'FontSize', 10);

```

```

31 ylabel('Nilai Opsi (V)', 'FontSize', 10);
32 hold on;
33 grid on;
34 S0 = 100; % nilai opsi saat t=0
35 K = 90; % nilai opsi saat T
36 r = 0.05; % tingkat suku bunga bebas resiko
37 sigma = 0.1; % fluktuasi nilai opsi
38 T = 1; % waktu jatuh tempo
39 t = 0.25;
40 Nt=T-t;
41 j=1
42 for i=0:0.1:2
43     S(j)=i*S0
44     adj_sigma=sigma*sqrt((2*Nt+1)/(6*(Nt+1)));
45     rho=0.5*(r-(sigma^2)*0.5+adj_sigma^2);
46     d1 = (log(S(j)/K)+(rho+0.5*adj_sigma^2)*T)/(
47         adj_sigma*sqrt(T));
48     d2 = (log(S(j)/K)+(rho-0.5*adj_sigma^2)*T)/(
49         adj_sigma*sqrt(T));
50     price(j) = exp(-r*T)*(S(j)*exp(rho*T)*normcdf(d1)-K
51         *normcdf(d2))
52     j=j+1;
53 end
54 N = 0:0.1:2;
55 plot(s,price,'-r','linewidth',3);
56 gtext('price', 'FontSize', 12);
57 title('Simulasi Analitik Aproksimasi dan Analitik',
58     'FontSize', 10);
59 ylabel('Nilai Opsi (V)', 'FontSize', 10);
60 legend('Analitik Aproksimasi', 'Analitik');
61 hold on;
62 grid on;
63 x = abs(V-price)
64 double(x)

```

LAMPIRAN B

Source Code Pengaruh Nilai *Strike Price*

```
1  clc;
2  clear;
3  Sn0 = 100; % nilai opsi saat t=0 1
4  Kn1 = 55; % nilai opsi saat T
5  Kn2 = 65; % nilai opsi saat T 1
6  Kn3 = 75; % nilai opsi saat T 2
7  Kn4 = 85; % nilai opsi saat T 3
8  Kn5 = 95; % nilai opsi saat T 4
9  rn = 0.05; % tingkat suku bunga bebas resiko
10 sd = 0.7; % fluktuasi nilai opsi
11 Tn = 1; % waktu jatuh tempo
12 tn = 0.25; % waktu sampai jatuh tempo
13 nn = 2;
14 tau = (1/3*(Tn)^2)*(Tn-tn)^3;
15 j=1;
16 for i = 0:0.1:nn;
17     Sn1(j) = i * Sn0;
18     Jn1(j) = Sn1(j);
19     W01(j)=exp(((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
        tn)))))-Kn1;
20 h=0;
21 for ii=1:30
22     g = ((-1)^ii)*(((sd)^2)*tau/2)^ii;
23     h=h+g;
24 end
25 Wn1(j)=exp(((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
        tn))))+(1/(2*Tn))*(rn-((sd)^2)/2)*((Tn-tn)^2));
26 V1(j)=W01(j)+(h*Wn1(j)*exp(-rn*(Tn-tn)))
27 V1(j)=max(V1(j),0);
28 double(V1)
29 W02(j)=exp(((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
        tn)))))-Kn2;
30 Wn2(j)=exp(((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
        tn))))+(1/(2*Tn))*(rn-((sd)^2)/2)*((Tn-tn)^2));
```

```

31 V2(j)=W02(j)+(h*Wn2(j)*exp(-rn*(Tn-tn)))
32 V2(j)=max(V2(j),0);
33 double(V2)
34 W03(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
tn))))-Kn3;
35 Wn3(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
tn)))+(1/(2*Tn))*(rn-((sd)^2)/2)*((Tn-tn)^2));
36 V3(j)=W03(j)+(h*Wn3(j)*exp(-rn*(Tn-tn)))
37 V3(j)=max(V3(j),0);
38 double(V3)
39 W04(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
tn))))-Kn4;
40 Wn4(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
tn)))+(1/(2*Tn))*(rn-((sd)^2)/2)*((Tn-tn)^2));
41 V4(j)=W04(j)+(h*Wn4(j)*exp(-rn*(Tn-tn)))
42 V4(j)=max(V4(j),0);
43 double(V4)
44 W05(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
tn))))-Kn5;
45 Wn5(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
tn)))+(1/(2*Tn))*(rn-((sd)^2)/2)*((Tn-tn)^2));
46 V5(j)=W05(j)+(h*Wn5(j)*exp(-rn*(Tn-tn)))
47 V5(j)=max(V5(j),0);
48 double(V5)
49 j=j+1;
50 end
51 N = 0:0.1:nn;
52 plot(Sn1,V1,'-ro',Sn1,V2,'-bo',Sn1,V3,'-go',Sn1,V4,
'-co',Sn1,V5,'-mo','linewidth',2);
53 gtext('V(i)', 'FontSize', 12);
54 title('Simulasi Pengaruh K', 'FontSize', 10);
55 xlabel('Harga Saham (S)', 'FontSize', 10);
56 ylabel('Nilai Opsi (V)', 'FontSize', 10);
57 legend('K1 = 55', 'K2 = 65', 'K3 = 75', 'K4 = 85',
'K5 = 95');
58 hold on;
59 grid on;

```

LAMPIRAN C

Source Code Pengaruh Nilai *Maturity Date*

```

1  clc;
2  clear;
3  Sn0 = 100; % nilai opsi saat t=0 1
4  Kn1 = 90; % nilai opsi saat T
5  Tn5 = 9;
6  Tn4 = 7; % nilai opsi saat T 2
7  Tn3 = 5; % nilai opsi saat T 3
8  Tn2 = 3; % nilai opsi saat T 4
9  rn = 0.05; % tingkat suku bunga bebas resiko
10 sd = 0.7; % fluktuasi nilai opsi
11 Tn = 1; % waktu jatuh tempo
12 tn = 0.25; % waktu sampai jatuh tempo
13 nn = 2;
14 j=1;
15 for i = 0:0.1:nn;
16     Sn1(j) = i * Sn0;
17     tau = (1/3*(Tn)^2)*(Tn-tn)^3;
18     Jn1(j) = Sn1(j);
19     W01(j)=exp(((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
        tn)))))-Kn1;
20 h=0;
21 for ii=1:30
22     g = ((-1)^ii)*(((sd)^2)*tau/2)^ii);
23     h=h+g;
24 end
25 Wn1(j)=exp(((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
        tn)))+(1/(2*Tn))*(rn-((sd)^2)/2)*((Tn-tn)^2)));
26 V1(j)=W01(j)+(h*Wn1(j)*exp(-rn*(Tn-tn)))
27 V1(j)=max(V1(j),0);
28 double(V1)
29 tau = (1/3*(Tn2)^2)*(Tn2-tn)^3;
30 W02(j)=exp(((1/Tn2)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(
        Tn2-tn)))))-Kn1;

```

```

31 Wn2(j)=exp((1/Tn2)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(
    Tn2-tn)))+(1/(2*Tn2))*(rn-((sd)^2)/2)*((Tn2-tn)
    ^2));
32 V2(j)=W02(j)+(h*Wn2(j)*exp(-rn*(Tn2-tn)))
33 V2(j)=max(V2(j),0);
34 double(V2)
35 tau = (1/3*(Tn3)^2)*(Tn3-tn)^3;
36 W03(j)=exp((1/Tn3)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(
    Tn3-tn)))-Kn1;
37 Wn3(j)=exp((1/Tn3)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(
    Tn3-tn)))+(1/(2*Tn3))*(rn-((sd)^2)/2)*((Tn3-tn)
    ^2));
38 V3(j)=W03(j)+(h*Wn3(j)*exp(-rn*(Tn3-tn)))
39 V3(j)=max(V3(j),0);
40 double(V3)
41 W04(j)=exp((1/Tn4)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(
    Tn4-tn)))-Kn1;
42 tau = (1/3*(Tn4)^2)*(Tn4-tn)^3;
43 Wn4(j)=exp((1/Tn4)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(
    Tn4-tn)))+(1/(2*Tn4))*(rn-((sd)^2)/2)*((Tn4-tn)
    ^2));
44 V4(j)=W04(j)+(h*Wn4(j)*exp(-rn*(Tn4-tn)))
45 V4(j)=max(V4(j),0);
46 double(V4)
47 W05(j)=exp((1/Tn5)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(
    Tn5-tn)))-Kn1;
48 tau = (1/3*(Tn5)^2)*(Tn5-tn)^3;
49 Wn5(j)=exp((1/Tn5)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(
    Tn5-tn)))+(1/(2*Tn5))*(rn-((sd)^2)/2)*((Tn5-tn)
    ^2));
50 V5(j)=W05(j)+(h*Wn5(j)*exp(-rn*(Tn5-tn)))
51 V5(j)=max(V5(j),0);
52 double(V5)
53 j=j+1;
54 end
55 N = 0:0.1:nn;
56 plot(Sn1,V1,'-ro',Sn1,V2,'-b*',Sn1,V3,'-g+',Sn1,V4,
    '-cd',Sn1,V5,'-ms','linewidth',2);
57 gtext('V(i)', 'FontSize', 12);
58 title('Simulasi Pengaruh T', 'FontSize', 10);
59 xlabel('Harga Saham (S)', 'FontSize', 10);

```



```
60 ylabel('Nilai Opsi (V)', 'FontSize', 10);  
61 legend('T1 = 1', 'T2 = 2', 'T3 = 3', 'T4 = 4', 'T5  
    = 5');  
62 hold on;  
63 grid on;
```


LAMPIRAN D

Source Code Pengaruh Nilai *Risk Free Interest Rate*

```

1  clc;
2  clear;
3  Sn0 = 100; % nilai opsi saat t=0 1
4  Kn1 = 90; % nilai opsi saat T
5  rn5 = 1;
6  rn4 = 0.8; % nilai opsi saat T 2
7  rn3 = 0.6; % nilai opsi saat T 3
8  rn2 = 0.4; % nilai opsi saat T 4
9  rn = 0.2; % tingkat suku bunga bebas resiko
10 sd = 0.7; % fluktuasi nilai opsi
11 Tn = 1; % waktu jatuh tempo
12 tn = 0.25; % waktu sampai jatuh tempo
13 nn = 2;
14 tau = (1/3*(Tn)^2)*(Tn-tn)^3;
15 j=1;
16 for i = 0:0.1:nn;
17     Sn1(j) = i * Sn0;
18     Jn1(j) = Sn1(j);
19     W01(j)=exp(((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
        tn)))))-Kn1;
20     h=0;
21     for ii=1:30
22         g = ((-1)^ii)*((((sd)^2)*tau/2)^ii);
23         h=h+g;
24     end
25     Wn1(j)=exp(((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
        tn))))+(1/(2*Tn))*(rn-((sd)^2)/2)*((Tn-tn)^2));
26     V1(j)=W01(j)+(h*Wn1(j)*exp(-rn*(Tn-tn)))
27     V1(j)=max(V1(j),0);
28     double(V1)
29     W02(j)=exp(((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
        tn)))))-Kn1;

```

```

30 Wn2(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
    tn)))+(1/(2*Tn))*(rn2-((sd)^2)/2)*((Tn-tn)^2));
31 V2(j)=W02(j)+(h*Wn2(j)*exp(-rn2*(Tn-tn)))
32 V2(j)=max(V2(j),0);
33 double(V2)
34 W03(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
    tn))))-Kn1;
35 Wn3(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
    tn)))+(1/(2*Tn))*(rn3-((sd)^2)/2)*((Tn-tn)^2));
36 V3(j)=W03(j)+(h*Wn3(j)*exp(-rn3*(Tn-tn)))
37 V3(j)=max(V3(j),0);
38 double(V3)
39 W04(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
    tn))))-Kn1;
40 Wn4(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
    tn)))+(1/(2*Tn))*(rn4-((sd)^2)/2)*((Tn-tn)^2));
41 V4(j)=W04(j)+(h*Wn4(j)*exp(-rn4*(Tn-tn)))
42 V4(j)=max(V4(j),0);
43 double(V4)
44 W05(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
    tn))))-Kn1;
45 Wn5(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
    tn)))+(1/(2*Tn))*(rn5-((sd)^2)/2)*((Tn-tn)^2));
46 V5(j)=W05(j)+(h*Wn5(j)*exp(-rn5*(Tn-tn)))
47 V5(j)=max(V5(j),0);
48 double(V5)
49 j=j+1;
50 end
51 N = 0:0.1:nn;
52 plot(Sn1,V1,'-ro',Sn1,V2,'-b*',Sn1,V3,'-g+',Sn1,V4,
    '-cd',Sn1,V5,'-ms','linewidth',2);
53 gtext('V(i)', 'FontSize', 12);
54 title('Simulasi Pengaruh r', 'FontSize', 10);
55 xlabel('Harga Saham (S)', 'FontSize', 10);
56 ylabel('Nilai Opsi (V)', 'FontSize', 10);
57 legend('r1 = 0.02', 'r2 = 0.04', 'r3 = 0.06', 'r4 =
    0.08', 'r5 = 1');
58 hold on;
59 grid on;

```

LAMPIRAN E

Source Code Pengaruh Nilai Volatilitas

```
1  clc;
2  clear;
3  Sn0 = 100; % nilai opsi saat t=0 1
4  Kn1 = 90; % nilai opsi saat T
5  sd2 = 0.35; % nilai opsi saat T 1
6  sd3 = 0.55; % nilai opsi saat T 2
7  sd4 = 0.75; % nilai opsi saat T 3
8  sd5 = 0.95; % nilai opsi saat T 4
9  rn = 0.05; % tingkat suku bunga bebas resiko
10 sd = 0.15; % fluktuasi nilai opsi
11 Tn = 1; % waktu jatuh tempo
12 tn = 0.25; % waktu sampai jatuh tempo
13 nn = 2;
14 tau = (1/3*(Tn)^2)*(Tn-tn)^3;
15 j=1;
16 for i = 0:0.1:nn;
17     Sn1(j) = i * Sn0;
18     Jn1(j) = Sn1(j);
19     W01(j)=exp(((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
        tn)))))-Kn1;
20 h=0;
21 for ii=1:30
22     g = ((-1)^ii)*(((sd)^2)*tau/2)^ii);
23     h=h+g;
24 end
25 Wn1(j)=exp(((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
        tn))))+(1/(2*Tn))*(rn-((sd)^2)/2)*((Tn-tn)^2));
26 V1(j)=W01(j)+(h*Wn1(j)*exp(-rn*(Tn-tn)))
27 V1(j)=max(V1(j),0);
28 double(V1)
29 W02(j)=exp(((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
        tn)))))-Kn1;
30 Wn2(j)=exp(((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
        tn))))+(1/(2*Tn))*(rn-((sd2)^2)/2)*((Tn-tn)^2));
```

```

31 V2(j)=W02(j)+(h*Wn2(j)*exp(-rn*(Tn-tn)))
32 V2(j)=max(V2(j),0);
33 double(V2)
34 W03(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
    tn))))-Kn1;
35 Wn3(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
    tn)))+(1/(2*Tn))*(rn-((sd3)^2)/2)*((Tn-tn)^2));
36 V3(j)=W03(j)+(h*Wn3(j)*exp(-rn*(Tn-tn)))
37 V3(j)=max(V3(j),0);
38 double(V3)
39 W04(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
    tn))))-Kn1;
40 Wn4(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
    tn)))+(1/(2*Tn))*(rn-((sd4)^2)/2)*((Tn-tn)^2));
41 V4(j)=W04(j)+(h*Wn4(j)*exp(-rn*(Tn-tn)))
42 V4(j)=max(V4(j),0);
43 double(V4)
44 W05(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
    tn))))-Kn1;
45 Wn5(j)=exp((1/Tn)*(tn*log(Jn1(j))+log((Sn1(j))^(Tn-
    tn)))+(1/(2*Tn))*(rn-((sd5)^2)/2)*((Tn-tn)^2));
46 V5(j)=W05(j)+(h*Wn5(j)*exp(-rn*(Tn-tn)))
47 V5(j)=max(V5(j),0);
48 double(V5)
49 j=j+1;
50 end
51 N = 0:0.1:nn;
52 plot(Sn1,V1,'-ro',Sn1,V2,'-bo',Sn1,V3,'-go',Sn1,V4,
    '-co',Sn1,V5,'-mo','linewidth',2);
53 gtext('V(i)', 'FontSize', 12);
54 title('Simulasi Pengaruh Volatilitas', 'FontSize',
    10);
55 xlabel('Harga Saham (S)', 'FontSize', 10);
56 ylabel('Nilai Opsi (V)', 'FontSize', 10);
57 legend('Sigma1 = 0.15', 'Sigma2 = 0.35', 'Sigma3 =
    0.55', 'Sigma4 = 0.75', 'Sigma5 = 0.95');
58 hold on;
59 grid on;

```

Biodata Penulis



Penulis bernama lengkap Ana Wulandari, lahir di Probolinggo pada 20 Maret 1996. Anak sulung dari pasangan Samsul Arifin dan Supaidah, serta memiliki 1 saudara kandung bernama Ayunda Putri Permatasari. Penulis mengikuti pendidikan dasar dari Taman Kanak-Kanak hingga Sekolah Menengah Atas di Kota Probolinggo. Setelah Lulus dari SMA Negeri 2 Probolinggo pada tahun 2014, penulis melanjutkan pendidikan tingginya di Matematika ITS Surabaya dengan bidang minat Matematika Terapan. Selama mengikuti perkuliahan di ITS, penulis turut aktif dalam beberapa kegiatan kemahasiswaan di Jurusan sebagai Staff Departemen Applied Science Himatika ITS Periode 2015/2016, Staff BK Peduli JMMI ITS 2015/2016 - 2016/2017, menjadi Sekretaris Departemen Dalam Negeri di UK Rebana ITS periode 2016/2017 serta menjadi Staff Keputrian PMII 1011 periode 2017/2018. Selain berorganisasi, penulis juga menjadi Tutor Kalkulus LBB BEM FMIPA serta menjadi asisten dosen Kalkulus, matrikulasi maba beasiswa PBSB Kemenag 2018 dan WTKI. Penulis juga mengikuti Kerja Praktek di Kantor Otoritas Jasa Keuangan Regional 4 Jawa Timur selama satu bulan dan ditempatkan di divisi EPK. Selain itu, sejak Januari 2018 sampai saat ini penulis menjadi Tim Olah Data di Indana Consultant.

Adapun informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email anawulandari0@gmail.com